

NATURA NECESITĂȚII PROPOZIȚIILOR MATEMATICII LA LUDWIG WITTGENSTEIN

Cristina NEMEROVSCHI¹

concept23y@yahoo.com

ABSTRACT: Constructivism and platonism (realism) are two fundamental directions in the philosophy of mathematics. Considering M. Dummett, C. Hempel, Baker & Hacker and M. Țurlea's works, I will analyze Wittgenstein's position as a radical constructivist, in *Tractatus-ul Logico-Philosophicus as well as in Remarks on the Foundations of Mathematics*. The most interesting and intriguing consequence of Wittgenstein's constructivism is the nature of the mathematical necessity, which differs from the one asserted by the mathematical platonism, but also slightly from the one asserted by logical positivism. What makes mathematics such an infallible discipline, according to Wittgenstein?

În filosofia matematicii, platonismul (realismul matematic) și constructivismul stau ca două curente fundaționiste radical opuse, în special prin aserțiunile metafizice pe care le implică despre natura existenței obiectelor matematice. Unii filosofi și matematicieni consideră că aceste două poziții acoperă în întregime teritoriul în granițele cărora se desfășoară filosofia matematicii. Alții, dimpotrivă, consideră că nu există o dihotomie reală între aserțiunile platoniste și cele constructiviste (un exemplu este M. Dummett), și că putem vorbi despre o poziție intermediară între cele două.

¹ Cristina Nemerovski este licențiată a Facultății de Filosofie a Universității București cu lucrarea intitulată *Distincția analitic – sintetic în cadrul empirismului logic*. A urmat un master al aceleiași facultăți, finalizat cu o dizertație în domeniul filosofiei matematicii, și un master în cadrul facultății de Comunicare și Relații Publice, SNSPA. În prezent, este redactor al e-revistei de cultură EgoPHobia și colaborator permanent al revistei Europe's Times and Unknown Waters, unde publică proză, articole și studii de filozofie.

L. Wittgenstein împărtășește viziunea constructivistă (convenționalistă) față de natura enunțurilor matematice atât în perioada timpurie a filosofiei sale, cât și în cea târzie, când scrie *Remarci asupra fundamentelor matematicii*. Dacă, în ce privește perioada târzie, se cade în general de acord asupra poziției sale convenționaliste, în perioada *Tractatus*-ului comentatorii apreciază că Wittgenstein subscie unei forme de realism matematic, și anume logicismul. Această poziție nu este cu toate acestea incompatibilă cu un anumit grad, mai moderat, de convenționalism, de care filosoful austriac nu este străin nici în această fază a gândirii sale. În *Tractatus*, ca și în *Remarci asupra fundamentelor matematicii*, Wittgenstein se împotrivesc presupuziției esențiale platoniste, aceea că obiectele (matematice) au existență obiectivă, abstractă, independentă de gândirea noastră.

1. Distincția de natură între propozițiile logicii și propozițiile empirice

În toate lucrările sale, Wittgenstein distinge clar și explicit între propozițiile logicii și cele ale științelor empirice. Această distincție este unul dintre elementele ce leagă *Tractatus-ul Logico-Philosophicus* de *Cercetări filosofice*.

Propozițiile științelor empirice, spune Wittgenstein în *Tractatus*, sunt singurele pe care le putem numi „cu sens”. Această categorie este singura care ne spune ceva despre realitate. Temeiul acestor propoziții este unul empiric – valoarea lor de adevăr se stabilește prin confruntarea cu datele senzoriale. Deoarece experiența nu poate oferi și întemeia un adevăr necesar și universal, care să nu mai aibă nevoie să fie revizuit ulterior, propozițiile empirice sunt contingente. Propozițiile empirice sunt „imagini” ale „stărilor de lucruri” (Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 4.01), oferindu-ne astfel o reprezentare a factualului. Adevărul sau falsitatea propoziției empirice se stabilește „comparând-o cu realitatea” (Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 4.06), valoarea ei de adevăr nu poate fi stabilită a priori. Legătura propoziției empirice cu starea de lucruri este una esențială – o propoziție empirică nu are sens independent de starea de lucruri pe care o descrie. Aplicat la propoziții elementare și stări de lucruri atomare, aceasta semnifică faptul că „dacă propoziția elementară este adevărată, atunci starea de lucruri atomară există. Dacă propoziția elementară este falsă, atunci

starea de lucruri atomară nu există” (Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 4.25).

Totalitatea propozițiilor empirice alcătuiesc întreaga „știință a naturii”. Lumea este descrisă complet prin specificarea propozițiilor elementare adevărate. Propozițiile empirice adevărate cuprind întreaga realitate, cu alte cuvinte nu există nimic factual care să nu poată fi descris printr-o propoziție empirică. Există însă ceva aparținând realității, consideră Wittgenstein, care nu este de natură factuală (nu ține de conținutul său), și anume forma realității, care nu poate fi descrisă, adică „spusă” prin limbaj, ci „arătată”. Acest lucru îl pot face propozițiile logicii.

În afară de propozițiile științelor empirice, limbajul nostru mai cuprinde propoziții vide de conținut și pseudo-propoziții, care gramatical au forma unor enunțuri, fiind nonsensuri. Ele sunt rezultatul unor confuzii de limbaj, spune convins Wittgenstein, iar locul în care predomină sunt tratatele de metafizică.

Propozițiile logicii sunt *analitice a priori*. Valoarea lor de adevăr este stabilită de regulile limbajului în care sunt formulate.

Necesitatea propozițiilor logicii este consecința faptului că valoarea lor de adevăr nu depinde de existența sau inexistența unor anumite stări de lucruri. Ele sunt adevărate sau false dacă sunt în acord, respectiv în dezacord, cu regulile limbajului, care sunt date independent de orice experiență, iar criteriul prin care sunt stabilite este cel al eficienței. Poziția lui Wittgenstein pare a fi aceea că, dacă vorbim despre necesitatea propozițiilor logicii, avem în vedere o necesitate convențională, operativă, și în orice caz nu una absolută, mistică – logica nefiind dată odată pentru totdeauna. Dacă am găsi o logică mai eficientă decât cea actuală, propozițiile logicii și-ar pierde necesitatea. Ele ar fi înlocuite de altele care ar fi necesare în interiorul noului cadru, pentru o anumită perioadă.

Deși nu ne dau informații despre realitate, nu înseamnă că aceste enunțuri nu au rol cognitiv. În *Tractatus Logico-Philosophicus*, filosoful austriac este angajat față de existența unei similarități între forma lumii și forma limbajului. Dacă logica stă la baza limbajului, ea dând regulile de formare ale acestuia, atunci între logică și realitate există o corespondență structurală. În logică se arată structura lumii, spune Wittgenstein.

Dacă și în lucrările de mai târziu, cum ar fi *Cercetări filosofice, Despre certitudine, Remarci asupra fundamentelor matematicii*, Wittgenstein își va păstra concepția despre caracterul analitic a priori, în consecință tautologic, al logicii, el nu va mai alocă atât de mult spațiu acestei probleme. În argumentația *Tractatus*-ului însă, ele ocupă un loc esențial. Aceste propoziții, alături de cele empirice, reprezintă întreg tabloul a ceea ce putem spune, adică plasa, în mod corect, în interiorul granițelor limbajului. Ele delimitează, din această parte interioară a limbajului – singura pe care o putem cunoaște – ceea ce stă în afara acestuia, adică nonsensul, care doar se arată.

Faptul că o propoziție logică este o tautologie sau contradicție arată ceva despre structura lumii.

Dacă am avea un alt limbaj, am avea și o altă logică. Wittgenstein va dezvolta această teorie în *Cercetări filosofice*, unde va propune o perspectivă a mai multor tipuri de limbaj.

Deosebirea de esență între factual și logic apare pe tot parcursul *Tractatus*-ului. Propozițiile empirice ne spun ceva despre conținutul realității, dar nu dau seamă despre forma comună a lumii și a limbajului, deoarece acest lucru nu poate fi spus, ci aratat.

În opinia lui Wittgenstein, nici propozițiile sintetice a posteriori, nici cele analitice a priori nu sunt exhaustive pentru înțelegerea „lumii”. Primele sunt verificabile, dar adevărul lor este contingent, rămâne deschis revizuirii. Propozițiile analitice sunt adevăruri necesare, dar nu ne dau în schimb informații despre realitate. Acesta nu este însă un fapt descurajant, spune Wittgenstein, deoarece fiecare dintre acestea are propriul rol. În plus, avem și nonsensurile, echivalente cu sinteticul a priori kantian, care ne arată ceva. Ceea ce critică Wittgenstein este tocmai această neînțelegere a faptului că aceste trei clase de enunțuri au roluri distincte. El respinge pretenția pseudo-propozițiilor de a fi exprimate într-un limbaj cu sens, pretenția acestora de a reprezenta cunoaștere.

Rolul propozițiilor logicii este în schimb cu totul altul.

2. Relația dintre adevărurile logicii și adevărurile matematicii

Atitudinea lui Wittgenstein față de logică și logicism a parcurs mai multe etape distincte (M. Țurlea, *Wittgenstein, anti-filosof al matematicii?*, Ed. Univ. București, 1996). În prima etapă, filosoful a aderat la programul logicist, sub influența lui Russell și Frege, considerând logica știința formală ideală, care poate fundamenta matematica.

Întreaga matematică, considerau logiciștii, poate fi redusă la logică și explicată prin aceasta, asigurând astfel matematicii fundamente la fel de certe precum cele ale logicii.

Dovadă că Wittgenstein împărtășește această concepție sunt afirmațiile sale precum „Matematica este o metodă logică” sau „Matematica este o metodă a logicii” din *Tractatus*. Așa cum logica arată o structură a lumii în tautologii, matematica arată același lucru în ecuații. Dacă este adevărat că “un zeu creează o lume în care unele propoziții sunt adevărate, atunci el creează prin aceasta deja o lume în care toate enunțurile care decurg din ele sunt și ele adevărate” (6.22).

Adevărurile analitice sunt considerate două clase de propoziții: adevărurile logicii și adevărurile care pot fi reduse la adevărurile logicii.

Din a doua categorie face parte mult invocatul enunț *Toți celibatarii sunt bărbați necăsătoriți*. Pe baza regulii de limbaj care ne spune că bărbat necăsătorit este sinonim cu celibatar, obținem o tautologie – *Toți celibatarii sunt celibatari* – care este un adevăr logic de forma *Toți x sunt x*. Empiriștii logici – Carnap de pildă – considerau că propozițiile matematice fac însă parte din prima categorie de adevăruri analitice, care sunt prin ele însele tautologii, fără a mai fi nevoie să fie reduse la altele.

Perspectiva lui Wittgenstein se va schimba odată cu abandonarea tezei potrivit căreia există o asemănare structurală între lume și limbaj. Wittgenstein va recunoaște această presuposiție ca fiind una din greșelile majore ale *Tractatus-ului*. Dacă avem un număr de jocuri de limbaj posibile, nu mai putem vorbi despre un sistem de reguli unic. Consecința va fi o relativizare a conceptului de regulă. Filosoful va renunța ulterior și la a mai acorda logicii o poziție privilegiată în raport cu matematica. Cele două vor fi considerate științe distincte, care nu pot și nu au de ce să se întemeieze una pe cealaltă. Dacă logica și matematica au tehnici de demonstrație diferite, rezultă că fiecare își stabilește propriile adevăruri.

3. Adevărul matematic – adevăr prin convenție

În filosofia matematicii, logicismul – programul care își propune să întemeieze matematica pe baze logice, în fapt o reducere a matematicii la logică – este considerat o specie de realism sau platonism matematic. Teza centrală a platonismului matematic este existența unei „realități matematice”, obiectivă, independentă de gândirea noastră. Enunțurile

matematice sunt despre obiecte abstracte, care există în sine, separat de realitatea pe care o percepem senzorial (existența lor este asemănătoare cu a Ideilor platonice). De aici se dezvoltă o teorie referențială a înțelesului – enunțurile matematice au sens întrucât referă la aceste obiecte, și, de asemenea, o teorie a adevărului-corespondență – enunțurile sunt adevărate dacă sunt conforme cu realitatea.

În *Remarci asupra fundamentelor matematicii*, Wittgenstein va respinge atât teoria referențială a înțelesului, cât și teoria adevărului-corespondență. El va considera că presupuziția fundamentală a logicștilor, aceea că putem vorbi despre obiecte matematice care există independent de regulile limbajului în care se vorbește despre proprietățile lor, este greșită și în același timp dăunătoare. Din perspectiva lui Wittgenstein este greșită, întrucât filosoful îmbrățișează o poziție convenționalistă, sau chiar radical convenționalist (“constructivism radical”, cum o numește Dummett). De pe această din urmă poziție, enunțurile matematicii au sens numai în virtutea unor reguli care sunt construite de matematician. Nu există niște „obiecte” la care aceste enunțuri să refere. Un enunț matematic nu poate fi adevărat în mod absolut (chiar dacă este necesar, în comparație cu unul întemeiat empiric) ci doar în interiorul unui anumit sistem de reguli. Presupuziția principală a logicismului este dăunătoare, consideră Wittgenstein, în primul rând deoarece prin postularea unei realități matematice obiective, abstracte, se deschide drumul speculațiilor metafizice.

Presupuziția de bază a platonistilor atrage după sine ideea că necesitatea ar fi consecința a ceva ce nu depinde de noi, a unei realități aflate în afara gândirii noastre, idee care i se pare inacceptabilă lui Wittgenstein, deoarece este în dezacord cu întreaga sa filosofie – dacă ceva este să fie cunoscut și se poate vorbi despre acel lucru (în acest caz, despre necesitate), se poate vorbi despre el în mod limpede, nu prin metafore și analogii. Încă din perioada *Tractatus-ului Logico-Philosophicus*, Wittgenstein se împotrivesc conștientizării necesității logice și matematice drept o necesitate întemeiată altfel decât pe baza regulilor de limbaj.

A considera că „sursa” necesității matematice stă în afara limbajului, și anume că ea provine din existența acestor obiecte platonice, ideale, despre care se formulează enunțuri ce nu pot fi decât necesare, reprezintă pentru filosoful austriac o absurditate. Deși în *Tractatus* împărtășește o poziție logicistă, Wittgenstein nu este nici aici de acord

cu faptul că enunțurile logicii sunt despre obiecte². Am putea astfel afirma că Wittgenstein, în *Tractatus Logico-Philosophicus*, nu are o poziție logicistă clasică; consideră matematica ca fiind „o metodă a logicii” și, de asemenea, că într-o lume în care propozițiile logicii sunt adevărate, întreaga matematică este și ea adevărată, deci că poate fi întemeiată pe logică. El însă nu împărtășește concepția platonistă potrivit căreia enunțurile matematice referă la obiecte dintr-un domeniu abstract, independent de gândirea celui care formulează enunțul și, mai ales, independent de limbajul în care este formulat enunțul. Numai propozițiile empirice referă la „stări de lucruri”. Nu există „obiecte logice”, spune Wittgenstein în *Tractatus*.

Alte afirmații din aceeași lucrare converg spre teoria că Wittgenstein a susținut o perspectivă convenționalistă față de adevărurile logicii și, implicit, ale matematicii. Iată câteva exemple:

- „constantele logice nu reprezintă”³;
- „în logică nu există numere privilegiate”⁴;
- „operația nu asertează nimic”⁵;
- relațiile logice „nu sunt relații reale”⁶;
- „tot ce este posibil în logică este de asemenea permis”⁷;
- „problema este de a construi un sistem de semne”⁸;
- „ne putem lipsi de propozițiile logice deoarece într-o notație

corespunzătoare putem recunoaște însușirile formale ale propozițiilor prin simpla examinare a acestor propoziții”⁹.

Totuși, Wittgenstein nu spune că alegerea unui sistem de notație este arbitrară. Mai degrabă, logica și limbajul sunt construite în așa fel încât ne constrâng să adoptăm anumite reguli, în detrimentul altora (idee ce vine în contradicție cu unele interpretări posibile ale afirmațiilor de mai sus). În logică, spune filosoful, “nu noi exprimăm cu ajutorul semnelor ceea ce voim, ci în logica natura semnelor vorbește ea însăși”¹⁰ – logica fiind, la Wittgenstein, un fel de oglindă

2 “Nu există obiecte logice”, spune Wittgenstein (Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, p. 112, par. 4.441)

3 Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, p. 99, par. 4.0312.

4 *Idem*, p. 108, par. 4.128.

5 *Ibidem*, p. 123, par. 5.25.

6 *Ibidem*, p. 128, par. 5.461.

7 *Ibidem*, p. 129, par. 5.473.

8 *Ibidem*, p. 130, par. 5.474.

9 *Ibidem*, p. 146, par. 6.122.

10 *Ibidem*, p. 148, par. 6.124

a realității. În plus, de pe poziții logiciste, Wittgenstein consideră că o propoziție este funcția valorilor de adevăr ale propozițiilor elementare care o compun, deci înțelesul este stabilit pe baza tabelelor de adevăr. Gânditorul austriac împărtășește aici concepția potrivit căreia nu poate exista decât o singură logică, deoarece există un singur limbaj, cel în care se oglindește structura esențială a lumii. Convențiile pe care le stabilim nu sunt deloc întâmplătoare. Logica ne impune chiar ea convențiile pe care trebuie să le stabilim. În *Remarci asupra fundamentelor matematicii*, convenționalismul wittgensteinian va deveni mai pregnant, odată cu dezavuarea oricărei forme de logicism.

În lucrări mai târzii, precum *Caietul albastru* sau *Cercetări filosofice*, filosoful austriac va respinge constant teoria referențială a înțelesului, considerând-o una dintre sursele principale ale erorilor filosofice, un exemplu clasic de „vrăjire a intelectului prin limbaj”. Ceea ce condamnă Wittgenstein este așteptarea ca fiecare concept să refere la un obiect sau să producă o imagine în minte, obiectul respectiv sau imaginea fiind apoi echivalate cu înțelesul conceptului. În realitate, înțelesul nu poate fi stabilit decât în interiorul unui anumit joc de limbaj – înțelesul este modul de folosire a aceluia cuvânt. Acesta, înțelesul, nu se găsește „în minte”, ci în uzul public al limbajului, idee prezentă și în *Remarci asupra fundamentelor matematicii*, unde Wittgenstein aduce o critică subtilă intuiționiștilor, care considerau că înțelesul unui enunț matematic este „imaginea mentală” pe care o produce, deschizând astfel drumul solipsismului – fiecare are imaginile sale mentale, la care ceilalți nu au acces. Spre deosebire de intuiționiști, Wittgenstein consideră că înțelesul enunțurilor matematice este public, evident, deschis oricui, și poate fi observat în modul în care sunt folosite enunțurile, în comportamentul legat de folosirea lor.

Revenind la poziția logicistă a lui Wittgenstein în *Tractatus*, care este compatibilă cu o teorie convenționalistă – sau lingvistică – a adevărului, se poate face observația că nici Frege, reprezentantul paradigmatic al logicismului, nu acceptă un „platonism ontologic”¹¹. Potrivit lui Marin Țurlea, Frege adoptă un realism moderat în ce privește statutul obiectelor matematice, la care referă enunțurile acestei științe. Numerele – un exemplu de entități matematice – sunt obiective, dar nu pentru că s-ar afla într-un domeniu al obiectelor abstracte, situat în

¹¹ M. Țurlea, *Filosofia și fundamentele matematicii*, p. 74.

afara noastră, care așteaptă să fie descoperit, cum susțin adepții platonismului matematic. Obiectivitatea acestora este dată de faptul că se găsesc „în gândire”: Frege preia caracterizarea leibniziană a adevărilor matematice ca „adevăruri de rațiune”. Așa cum susține S. Vieru, „ontologia realistă fregeană recunoaște și reconstruiește domeniul obiectivului, căci dependența obiectivității de rațiune este considerată în sens gnoseologic și nu ontologic, rațiunea fiind nu demiurgul, ci temeiul de a ajunge la ce este obiectiv”¹². Numerele sunt obiective, dar nu au existență reală – prin „real” Frege înțelege “concret”, adică situat în spațiu și timp.

În *Fundamentele aritmeticii*, Frege scrie de asemenea că „numărul nu este o entitate externă”¹³. Se poate vorbi, deci, și la Frege, ca și la Wittgenstein, de o poziție logicistă întrucâtva diferită față de doctrina clasică platonistă, în esență diferită prin faptul că nici Frege, și cu atât mai puțin Wittgenstein, nu sunt angajați ontologic față de existența unui domeniu al obiectelor abstracte, situat în afara gândirii, care conține entități cum ar fi numerele.

În *Caietul albastru*, Wittgenstein critică din nou teoria referențială a înțelesului. El numește “rătăcire filosofică” faptul că “un substantiv ne face să căutăm un lucru căruia să-i corespundă”. Aplicat la cazul nostru, conceptul de număr ne-ar trimite în mod greșit la ideea existenței unui obiect căruia să îi corespundă, la care să refere. Purtătorul unui nume nu trebuie confundat cu înțelesul numelui¹⁴. Când ne întrebăm “ce este numărul unu?”¹⁵, așa cum face și Frege în *Fundamentele aritmeticii*, nu trebuie să ne imaginăm că denotă un obiect, ci să reflectăm asupra modului în care îl folosim.

Teoria referențială ne poate induce în eroare și atunci când ne întrebăm asupra folosirii unui cuvânt; cum spune Wittgenstein, „greșeala ar putea fi exprimată astfel: căutăm folosirea unui semn, dar o căutăm ca și cum ar fi un obiect care co-există cu semnul”¹⁶. În realitate, spune filosoful, “semnul (propoziția) își primește semnificația de la sistemul de semne, de la limbajul căruia îi aparține”¹⁷. Această concepție apare

¹² S. Vieru, citat de M. Țurlea, *op. cit.*, p. 79.

¹³ Frege, *Fundamentele aritmeticii*, citat de M. Țurlea, *op. cit.*, p. 91.

¹⁴ Frege face distincția între semnificație (obiectul denotat de un nume) și sens (modul în care se stabilește semnificația).

¹⁵ Wittgenstein, *Caietul albastru*, Editura Humanitas, București, 1993.

¹⁶ Wittgenstein, *op. cit.*, p. 27.

¹⁷ *Idem*.

și în *Remarci*: un enunț matematic are semnificație și i se poate stabili valoarea de adevăr numai în interiorul unui sistem de reguli.

Întregul nostru limbaj are la bază convenții, afirmă Wittgenstein în *Caietul albastru*. Când vrem să găsim temeiul unui enunț, când întrebăm „De unde știi?”, ajungem la date ale simțurilor de genul „Simt”, „Văd”, care sunt, crede Wittgenstein, rezultat al unor convenții – de numire, de exemplu. Întreg comportamentul nostru, care este public și pe baza căruia stabilim înțelesuri, este rezultat al acceptării unor reguli.

Odată înțeleasă poziția lui Wittgenstein față de natura necesității propozițiilor logicii și matematicii, în capitolele viitoare vom explora consecințele convenționalismului wittgensteinian, noțiunile de demonstrație, regulă și axiomă, încheind cu argumente pro și contra aserțiunii că un convenționalism radical se poate susține în filosofia matematicii.

4. Consecințe ale convenționalismului wittgensteinian

Consecințele poziției wittgensteiniene din filosofia matematicii sunt multe. Putem include aici respingerea, în primul rând, a existenței „reale” a entităților despre care tratează enunțurile matematice, apoi respingerea teoriei adevărului-corespondență și a teoriei referențiale a înțelesului (despre care am vorbit în capitolul anterior), opțiunea pentru „finitism” (sau „strict finitism”). O altă consecință directă ar fi o poziție pragmatistă în filosofia matematicii. În acest capitol ne vom ocupa de prezentarea poziției lui Wittgenstein față de trei concepte despre care filosoful vorbește detaliat și explicit și care au legătură cu tot ce ar putea fi inclus în mulțimea *consecințelor convenționalismului wittgensteinian*. Este vorba despre noțiunile de **demonstrație**, **regulă** și **axiomă**. Analiza acestor trei concepte este interesantă nu doar pentru că ele stau la intersecția direcțiilor care pot fi trasate în filosofia matematicii a lui Wittgenstein, cât și pentru că sunt un exemplu al modului în care filosoful austriac analizează un concept.

4.1. Noțiunile de *demonstrație* și *regulă*

Conceptul de *demonstrație* este considerat de Wittgenstein esențial în matematică, deoarece este strâns legat de conceptul de *adevăr*. Nu putem ști cu exactitate ce înțelegea filosoful prin „matematică” – în mai multe locuri pe parcursul lucrării *Remarci asupra fundamentelor matematicii* afirmă că matematica este „calculare”, în altele

că este un concept vag și că el are în vedere, când vorbește despre matematică, „ceea ce fac matematicienii acum”. Indiferent la ce se referă Wittgenstein atunci când vorbește despre matematică, acesta consideră că demonstrația este „un model”, „paradigmă”, a modului în care stabilim adevărul sau falsitatea unui enunț.

Un enunț matematic, spune Wittgenstein, se „construiește” conform anumitor reguli. Demonstrația ne arată cum a fost construit enunțul conform acestor reguli; când regulile rămân aceleași, și modul în care le folosim (demonstrația) va fi de fiecare dată aceeași. Faptul că demonstrația nu se schimbă, date fiind aceleași condiții de operare, nu este contingent, ci reprezintă o necesitate. Spre deosebire de demonstrație, care are un caracter necesar atunci când regulile de operare nu sunt schimbate, experimentul poate avea rezultate identice de mai multe ori, dar asta se întâmplă în mod contingent. Dacă adun 200 de mere cu alte 200 de mere și obțin de mai multe ori 400 de mere, această adunare nu este o demonstrație, ci un experiment. Demonstrația trebuie să fie în stare să explice de ce am obținut un anumit rezultat, cu alte cuvinte ce regulă am folosit. Aceasta, spune Wittgenstein, ne arată despre un enunț „cum este într-un anumit fel”, adică pe ce bază este așa cum este, în timp ce experimentul ne spune doar ce este sau cât este.

„Construim demonstrația odată pentru totdeauna”, spune Wittgenstein. Demonstrația nu se va schimba atâta timp cât condițiile de raționare, adică regulile, rămân aceleași. În acest sens, este o paradigmă, iar acceptarea ei implică acceptarea prealabilă a regulilor pentru care stă demonstrația, a căror „imagine” este ea. „O procedură desfășurată în acest fel va duce întotdeauna la această configurație”, adică urmând aceleași reguli vom obține de fiecare dată o demonstrație identică.

Acceptarea demonstrației unui enunț sau a unei teoreme reprezintă acceptarea caracterului necesar al acelui enunț sau al acelei teoreme. Odată acceptată respectiva demonstrație, ceea ce a fost demonstrat își pierde caracterul contingent. Acest lucru nu este deloc surprinzător dacă avem în vedere că a accepta o demonstrație echivalează cu a accepta regulile care stau la baza acesteia și dacă avem în vedere că, la Wittgenstein, necesitatea nu este decât o consecință a acceptării unor anumite reguli lingvistice. Ideea că necesitatea provine din acceptarea unor reguli lingvistice de care ținem cont este prezentă, cum am mai spus, și în *Tractatus Logico-Philosophicus*. Spre deosebire de enunțurile

științelor empirice, care sunt contingente deoarece referă la realitatea pe care o percepem prin experiență și care este supusă schimbării, enunțurile logicii și matematicii au un caracter necesar ce provine din faptul că, în formularea lor, ne supunem unor reguli. *Nu este vorba despre o necesitate de tip ontologic*, susține Wittgenstein în *Tractatus Logico-Philosophicus* și *Remarci asupra fundamentelor matematicii*, ci despre o necesitate lingvistică, întemeiată pe acceptarea unor reguli. Propozițiile matematicii sunt necesare pentru că noi le facem să fie așa, prin simplul fapt că ne supunem unor reguli pe care tot noi le alegem. Apare aici o presuposiție strict constructivistă, anume importanța alegerii, deciziei în favoarea unui cadru lingvistic sau a altuia. Putem să alegem orice cadru dorim, consideră Wittgenstein și constructiviștii, dar trebuie să ne putem justifica decizia. De asemenea, putem opta pentru orice tip de sistem formal, care satisface cerințele de completitudine și consistență (non-contradicție), spun constructiviștii.

Chiar dacă rezultatul experimentului ar fi de fiecare dată același, el ar rămâne tot un experiment; nu ar arăta decât că lucrurile „s-au comportat normal”. Experimentul nu întemeiază un enunț, vrea să spună Wittgenstein.

Demonstrația, mai spune Wittgenstein, ne poate face să credem că adevărul enunțului demonstrat există în virtutea unei realități obiective, independente de demonstrație. Aceasta este însă o iluzie, spune filosoful, și ea a fost perpetuată prin confuzii care s-au născut din formalizarea mult prea insistentă a demonstrației. Intruziunea simbolismului russellian, este de părere Wittgenstein, „a provocat un rău considerabil”, deoarece acoperă, ascunde prin simboluri formele importante ale demonstrației, făcându-le de nerecunoscut.

Forma demonstrației poate fi însă înșelătoare adeseori, așa cum consideră Wittgenstein că sunt multe aspecte ale limbajului natural, motiv pentru care o formalizare este totuși utilă. Ea nu trebuie să fie însă excesivă și nu trebuie să ne facă să uităm punctul de pornire, acela că *adevărul enunțului se construiește în timpul demonstrației*, el nu există independent de aceasta. Wittgenstein, pe considerente similare, obiectează nu numai împotriva formalizării excesive, ci și împotriva logicismului care se face vinovat de popularea matematicii cu entități metafizice, platoniste. Logicismul a deformat gândirea atât a matematicienilor cât și a filosofilor, care nu mai pot să înțeleagă că valoarea de adevăr *o conferim noi* enunțurilor, nu o posedă acestea *a priori*,

spune el. Valoarea de adevăr este ceva convențional, perspectivă ce o contrazice pe cea platonistă. Wittgenstein exprimă cu claritate această idee: „chiar dacă propoziția matematică demonstrată pare să indice o realitate în afara demonstrației însăși, este totuși doar expresia acceptării unei noi dimensiuni (a realității)”.

Demonstrația se desfășoară pe baza luării de decizii; odată demonstrată, o propoziție are statut de regulă. Esențial este procesul prin care demonstrația *construiește* o propoziție, spune Wittgenstein, căci demonstrația ne arată și *cum* se construiește.

Odată demonstrată o propoziție, demonstrația va constitui înțelesul propoziției.

O demonstrație nu este o descriere a unui procedeu matematic – ea are un caracter normativ. Spune că *trebuie să fie așa*, nu doar că *este așa* – acest lucru îl face experimentul. Ea introduce paradigme noi. Nu putem spune că demonstrația descoperă ceva ce era existent, ci mai degrabă că inventează o nouă paradigmă. În acest sens, ea este normativă și nu descriptivă.

Wittgenstein accentuează ideea că matematica reprezintă o creație umană continuă, în care matematicianul ia permanent decizii. Din acest motiv, noi studiem matematica așa cum este ea acum, nu cum va fi în viitor, pentru că nu putem anticipa deciziile pe care le vor lua matematicienii de acum înainte, dacă vor inventa și apoi accepta alte reguli, etc. Wittgenstein respinge categoric metafora matematicianului ca descoperitor, propusă de Frege, care afirmase: „Matematicianul nu poate crea mai mult decât geograful – el poate numai să descopere ce există și să-i dea un nume”.

4. 2. Noțiunea de *axiomă*

Axiomele unui sistem matematic sunt propozițiile pe care le considerăm adevărate, fără a le demonstra. Poziția tradițională era aceea că dintre propozițiile unui sistem le vom considera axiome pe cele autoevidente. Wittgenstein consideră, în acord cu teoria empiriștilor logici (susținută, spre exemplu, de Hempel) că orice propoziția sistemului poate fi luată ca axiomă și că totul depinde de alegerea pe care o face matematicianul. Este evident aici constructivismul radical al lui Wittgenstein – nimic nu este dinainte dat, matematicianul construiește după propria voință, ținând seama doar ca sistemul său să fie complet și non-contradictoriu.

Axioma, spune Wittgenstein, nu are caracter necesar pentru că ceea ce susține ea este mai probabil decât ceea ce susține o propoziție empirică, ci pentru că noi îi oferim o funcție diferită de cea a unei propoziții empirice, ba chiar în conflict cu funcția acesteia din urmă.

Rolul propoziției empirice este de a ne informa în legătură cu realitatea pe care o percepem prin simțuri. De aceea, ea nu poate fi decât contingentă, nu în sensul că simțurile ne pot înșela, ci prin faptul că realitatea empirică însăși este contingentă, deoarece noi o cunoaștem așa cum este într-un anumit moment, fără a putea spune ceva necesar despre cum va fi în viitor. Propoziția matematică are un caracter anticipativ în sensul că, de fiecare dată când sunt urmați anumiți pași, vom obține același rezultat. Propoziția matematică, în schimb, nu ne dă informații despre realitatea empirică. Tot ce ne poate spune o astfel de propoziție se referă la reguli lingvistice, la convenții. În acest sens, funcția unei propoziții matematice este în conflict cu cea a unei propoziții empirice.

Când „cuvintele unei axiome sunt date”, sensul axiomei este încă indeterminat, spune Wittgenstein. Sensul va fi fixat abia după ce matematicianul decide care este statutul propoziției respective, dacă o acceptă ca axiomă a sistemului sau ca propoziție ce urmează a fi demonstrată (caz în care această operație îi va fixa înțelesul). Revine aici echivalarea înțelesului cu modul de folosire a unei propoziții. Este o poziție apropiată de pragmatism, pe care o va îmbrățișa Wittgenstein pe tot parcursul lucrării *Remarci asupra fundamentelor matematicii*. Analog, sensul unui termen este dat numai odată cu folosirea lui într-o propoziție. În concluzie, stabilirea înțelesului unui termen este tot o activitate de creație liberă a matematicianului.

În ce privește așa-numita *autoevidență* a axiomelor matematice, realismul matematic consideră că ea este rezultatul faptului că enunțurile matematice exprimă adevăruri innăscute, pe care noi nu le cunoaștem prin experiență, ci le *recunoaștem* cu ajutorul intuiției. Wittgenstein adoptă și aici o poziție pragmatistă: autoevidența este „cel mai simplu mod în care îmi pot imagina acele axiome”. Nu autoevidența, ci faptul că folosim o axiomă ca pe o axiomă o fac să fie axiomă. Dacă din motive de simplificare a exprimării, alegem să recunoaștem o axiomă după caracterul ei autoevident, nu trebuie să uităm că am operat acest lucru în virtutea unei *convenții*. “Nu faptul că noi găsim propoziția adevărată în mod autoevident, ci faptul că noi facem ca autoevidența să conteze, o face să fie propoziție matematică”, spune Wittgenstein.

Autoevidența unei propoziții constă în imposibilitatea de a ne imagina contrariul acelei propoziții. Este însă mai mult decât atât, spune Wittgenstein. Dacă acesta ar fi unicul criteriu, nu am putea distinge prea bine caracterul diferit al axiomei față de cel al propoziției empirice. Este vorba despre faptul că propoziția matematică *nu poate fi decât adevărată* dacă noi alegem să respectăm regulile. Este exact ceea ce o deosebește de un experiment. Dacă, efectuând un experiment, constatăm în mod greșit că $2+2=5$, opusul acestei propoziții ($2+2$ nu fac 5) nu este infirmat, pentru că adevărul propoziției a fost stabilit în mod contingent, pe baze empirice.

Wittgenstein face și câteva remarci legate de modul de exprimare a axiomelor – pentru că axioma este o parte specială a discursului, ar trebui să fie precedată de un semn de aserțiune special, pentru a ști că avem de-a face cu o propoziție care are o funcție diferită de cea a unei propoziții empirice. Și în cazul axiomelor, suntem duși de multe ori în eroare de exprimarea vagă a limbajului. Clarificarea confuziilor de limbaj este valabilă și în ce privește axiomele.

Afirmația lui Wittgenstein cum că o *propoziție matematică se sprijină pe patru picioare, nu pe trei – este supradeterminată* poate fi interpretată în sensul sugerat anterior. Spre deosebire de propoziția empirică, propoziția matematică este determinată de reguli lingvistice. Chiar dacă acestea creează uneori confuzii, nefiind suficient de explicite și univoce, ele stabilesc valoarea de adevăr a propoziției matematice într-un mod necesar, deoarece nu au nimic de-a face cu empiricul. Propoziția matematică este adevărată în virtutea limbajului în care este formulată, iar adevărul ei este necesar atâta timp cât nu schimbăm cadrul lingvistic. Fiind adevărată în virtutea unei convenții, adevărul ei este unul pe care îl stabilesc matematicienii.

M. Dummett, în articolul *Wittgenstein's Philosophy of Mathematics*, face distincție între un „convenționalism modificat”, care presupune că adevărul necesar derivă din convenții lingvistice, dar nu derivă direct ci este o consecință a acestor convenții, și un alt tip de convenționalism – cel al lui Wittgenstein – un convenționalism strict care consideră că necesitatea logică și matematică “este întotdeauna exprimarea directă a unei convenții lingvistice”.

Primul tip de convenționalism este cel pe care îl întâlnim la empirismul logic, spune Dummett. Acest fel de convenționalism, numit și moderat deoarece nu presupune o derivare directă a adevărului

logic din convenții, s-a dovedit inconsistent. În plus, cel practicat de empiriștii logici – convenționalism moderat, în opinia lui Dummett – se consideră depășit odată cu apariția articolului lui Quine, *Două dogme ale empirismului*. Articolul lui Quine a impus concluzia că nu putem distinge atât de radical, precum o făceau reprezentanții pozitivismului logic, între adevăruri analitice și adevăruri sintetice, deci nu putem susține că un adevăr al logicii sau al matematicii este necesar doar în virtutea unor convenții lingvistice.

Baker și Hacker apreciază că se pot formula două argumente consistente împotriva convenționalismului moderat (cei doi autori păstrează denumirea dată de Dummett convenționalismului logic-empirist):

(1) Definițiile sunt reguli de substituire a expresiilor

Demonstrația faptului că o propoziție este analitică trebuie să pornească de la o instanță a unei propoziții a logicii (cei doi autori nu argumentează cu acuratețe această premisă). În consecință, izolarea adevărilor logice este presupusă în definiția adevărului analitic și de formularea convențiilor lingvistice; astfel, adevărurile logice nu sunt produsul exclusiv al convenției.

Acest argument nu este însă formulat cu prea multă claritate – autorii vor probabil să susțină că o teorie ce pune convențiile la baza necesității nu poate evita un cerc vicios. El se formează ca urmare a încercării de a explica necesitatea prin convenții, care la rândul lor nu pot fi explicate decât tot prin necesitate convențională. Dacă se încearcă evitarea acestui cerc vicios, trebuie să se recurgă și la altă noțiune în afara celei de „necesitate lingvistică”.

(2) Adevărurile necesare (fie și numai ale logicii) nu pot fi epuizate exhaustiv prin enumerare

Astfel, dacă sunt adevărate în virtutea convențiilor, trebuie să mai existe ceva (în metalimbaj) cum ar fi, de pildă, principiul instanțierii universale care este indispensabil pentru specificarea consecințelor convențiilor. Dar pentru că aceste principii logice stau în afara convențiilor – în metalimbaj – noțiunea de adevăr prin convenție aduce o simplificare mai puțin esențială pentru filosofie decât părea să promită, concluzionează Baker și Hacker în *Wittgenstein. Rules, Grammar and Necessity*.

Potrivit celor doi autori, convenționalismul standard, cel moderat, are o lacună: enumerarea adevărilor necesare în limbajul obiect ca adevăruri prin convenție presupune alte adevăruri necesare în metalimbaj, a căror necesitate rămâne neelucidată.

Convenționalismul standard este superficial, deoarece „acceptând că enunțurile necesare nu sunt înregistrări directe ale convențiilor, ci mai degrabă într-o măsură mai mică sau mai mare consecințe ale convențiilor, rămâne neexplicat statutul aserțiunii că, dacă adoptăm anumite convenții ca axiome împreună cu altele considerate ca principii de inferență, atunci suntem obligați să aderăm la convenția conținută în teoremă”, spun Baker și Hacker.

Poziția lui Dummett sub acest aspect este aproape identică – convenționalistul moderat, întrebat care este statutul principiilor logice în acord cu care trecem de la axiome la teoreme, va răspunde că „subscrierea la aceste principii este la rândul ei expresia adoptării unor convenții lingvistice”. Această poziție este superficială, consideră Dummett, întrucât nu dă seama despre semnificația pe care o are expresia că o convenție are anumite consecințe, expresie care ar fi esențială pentru convenționalism și care, dacă ar primi o explicare satisfăcătoare, ar putea să evidențieze anumite avantaje pe care le are convenționalismul în raport cu alte poziții din filosofia matematicii.

Bibliografie

- [1] Baker & Hacker, *Wittgenstein. Rules, Grammar and Necessity*, Basil Blackwell, Oxford, 1985
- [2] Deloche C., *La Philosophie Des Mathematiques chez Wittgenstein*, CNRS Editions, Paris, 1995
- [3] Dummett M., *Wittgenstein's Philosophy Of Mathematics*, Harvard University Press, 1978
- [4] Hempel C., *On The Nature Of Mathematical Truth*, American Philosophical Review, nr. 25, 1945
- [5] Țurlea M., *Filosofia Matematicii*, Ed. Univ. București, București, 2002
- [6] Wittgenstein L., *Caietul albastru*, Ed. Humanitas, București, 1993
- [7] Wittgenstein L., *Remarks on the Foundations of Mathematics*, Penguin Books, Londra, 1965
- [8] Wittgenstein L., *Tractatus Logico-Philosophicus*, Ed. Humanitas, București, 2001