UNELE MODELE MATEMATICE DE SISTEME DINAMICE PENTRU EVOLUȚIA POPULAȚIILOR

Eugen VASILE[1]

evasevas@yahoo.com

ABSTRACT:

Some theoretical dynamic system models of the evolution of "populations" are considered, and by analysing them the paper offers the concrete form of equations, a standard and concise form of notations, and a proper terminology and symbolism facilitating the analysis, numerical simulation and some qualitative interpretations or model extensions. Numerical simulations based on the presented models were performed in the MathCAD software environment. Beyond some mathematical observations, the conclusion is that reality is always more complex than the models.

Keywords: mathematical modeling, dynamic systems, biology, population dynamics.

Cuprins

1. Introducere

Sunt analizate unele modele abstracte de sistem dinamic privind evoluţia "populaţiilor". Sunt considerate câteva modele devenite clasice, iar lucrarea oferă în analiza acestor modele forma concretă a ecuațiilor, notațiile într-o formă standard şi concisă și o terminologie şi o simbolistică adecvate care facilitează simularea numerică şi unele interpretări calitative sau extinderi de model. Simulări numerice bazate pe modelele prezentate au fost efectuate în mediul software MathCAD.

De-a lungul istoriei, ştiinţa a încercat să studieze cu ajutorul unor modele fizico-matematice legităţi din domeniul biologiei. Premergătoare[2] au fost *preocupările de biomecanică ale lui* Leonardo da Vinci (1452 - 1519, pictor, sculptor, arhitect şi om de ştiinţă italian) şi ale lui René Descartes (1596 - 1650, filosof şi matematician francez). Giovanni Alfonso Borelli (1608 - 1679, fiziolog, fizician, matematician şi astronom renascentist italian) este considerat întemeietorul *biomecanicii*. De asemenea este de menţionat *modelul hidrodinamic pentru circulaţia sângelui* al lui Leonhard Euler (1707 - 1783, matematician şi fizician elveţian).

[1] Ing. ș.l. Universitatea Politehnica București.
[2] Georgeta Nenciu, *Biomecanică*, Curs în tehnologia IFR, Bucureşti, Editura Fundaţiei România de Mâine, 2012.

Biologia populației este un domeniu interdisciplinar care se bazează pe modele matematice și studiază între altele și interacțiunile dintre populațiile diferitelor specii sau ale acestora cu mediul înconjurator. Totalitatea indivizilor care aparţin aceleiaşi specii, ocupând acelaşi areal care pot fi, uneori, izolaţi din punct de vedere reproductiv faţă de alţi indivizi din aceeasi specie este în prezent considerată că formează o populaţie; ea este integrată într-o *biocenoză* (comunitate de populaţii). Fără a urmări o analiză comparativă a modelelor, evidenţiem faptul că încadrarea matematică în conceptele teoriei sistemelor dinamice poate sa facă inteligibilă dinamica unor populatii din biologie atât sub aspect cantitativ dar mai ales calitativ.

"*Legi de mortalitate şi natalitate, datorate unor matematicieni din sec. al XVIII-lea ca A. de Moivre şi L. Euler, sunt recunoscute azi ca prefigurând teoria populaţiei stabile* p*, aşa cum a fost formulată de A. J. Lotka; se poate remarca la începutul sec. al XlX-lea legea lui B. Gompertz privind mortalitatea.*"[3]. Încercând o reprezentare analitică pentru o funcţie de mortalitate, s-a plecat de la ideea că *uzura progresivă a fiinţei umane* se exprimă la modul diferenţial prin ritmul $(-dp)/p$, interpretat ca o *probabilitate instantanee*.

S-a pornit de la modele simple care iniţial nu luau în considerare factori aleatori (dezastre naturale, mutaţia genetică etc) sau care considerau doar prezenţa unei specii. Începutul preocupărilor de a găsi *legi de creştere* a populaţiei poate fi considerată lucrarea *Eseu asupra principiului populaţiei* (1798) al lui Malthus[4]. Dinamica populaţiilor[5] este un subiect care extinde teoria evoluţiei a lui Darwin şi sistemul ereditar al lui Mendel. A devenit crucial pentru multe domenii curente ale ştiinţei. Ca repere istorice pot fi menţionate:

- *Modelul de creştere exponenţială a populaţiei al lui* Thomas Robert Malthus (1766 - 1834, teoretician economist englez) fondatorul teoriei care îi poartă numele, conform căreia *populaţia creşte în progresie geometrică, în timp ce mijloacele de subzistenţă cresc în progresie aritmetică*. Ca o consecinţă a acestei relaţii dintre populaţie şi starea economică, Malthus considera că sărăcia, bolile, epidemiile şi războaiele sunt factori pozitivi pentru omenire, dat fiind că asigură echilibrul între numărul populaţiei şi cantitatea mijloacelor de subzistenţă.
- *Probabilităţi şi statistică matematică* aplicate pentru legităţile biologice de către Johann Gregor Mendel (1822 - 1884, călugăr şi cercetător ştiinţific austriac); cunoscut ca fondator al geneticii, a studiat genetica populaţiilor de plante şi anumite *legi bioenergetice.*
- *Modelul logistic de creştere a populaţiei al lui* Pierre-François Verhulst (1804 - 1849, matematician şi medic belgian) elaborat în 1837 şi care a formulat, pentru prima dată, *curba logistică*. Această curbă a fost redescoperită de demografii americani Raymond Pearl şi Lowell Reed în 1920.[6]
- *Modelul cu ereditate* al lui Vito Volterra (1860 - 1940, matematician şi fizician italian) care a avut *contribuţii în teoria ecuaţiilor integrale şi în biologia matematică*.
- *Modelul cu două specii (pradă şi prădător)* propus în 1925 de către Alfred James Lotka (1880 - 1949, matematician, chimist (*chimie fizică*) şi statistician american) şi Vito Volterra.
- *Mecanica socială* a lui Spiru Haret (1851 - 1912, matematician, astronom și pedagog român) în care pentru *dinamica socială* sunt aplicate a) *principiul inerţiei*; b) *principiul mişcărilor relative*; c) *principiul egalităţii acţiunii şi reacţiunii*, iar *starea de echilibru a unui sistem de forţe sociale nu*

[3] Vladimir Trebici**,** *Mică enciclopedie de demografie***,** Bucureşti, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, 1975, p 305.
[4] Thomas Malthus, *An Essay on the Principle of Population*, London, Printed for J. Johnson, in St. Paul's Church-Yard, 1798.
[5] WEB, Population dynamics, https://en.wikipedia.org/wiki/Population_dynamics.
[6] Pearl, Raymond & Lowell J. Reed, *On the Mathematical Theory of Population Growth*, Ferrara, Taddei, 1923

implică starea de repaus social[7]. Abordarea fizică şi matematică i-a permis lui Spiru Haret să formuleze principii de epistemologie a fenomenelor sociale[8].

Modelele matematice cu destinaţia pentru biologie sunt în fapt utilizate în domenii interdisciplinare cun sunt biofizică, biochimie, biomecanică, biodinamică, bioeconomie, biodiversitate, bioetică, biotehnologie, bioenergetică, biogeneză, biostatistică, bioinformatică, bionică, bioinginerie. Încadrate generic în *biomatematică*, aceste modele se bazează în linii mari pe ramuri ale matematicii aplicate: ecuaţii diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale, ecuaţii integro-diferenţiale, probabilităţi şi procese stocastice, oscilaţii neliniare, sisteme dinamice etc.

Este necesară o matematică discretă sau continuă ? Populaţia p este o funcţie de timp; practic ea are valori discrete, iar observaţia se face în timp t discret; în biometrie timpul este identificat chiar cu vârsta în ani şi în mod obişnuit populaţia este considerată aceeaşi pentru toate valorile cuprinse între t şi $t+1$, t fiind un număr întreg, ceea ce înseamnă că funcţiile sunt prezentate ca discontinue, în scară. *Raţiuni practice pledează pentru folosirea unor funcţii discontinue de acest fel; teoretic însă, nu este justificată o asemenea considerare*[9]. De aceea, este necesară utilizarea unor funcţii având continuitate cel puţin până la prima derivată; este în fapt întotdeauna posibilă o aproximare (interpolare !) prin funcţii *netede* până la o derivată de ordin superior dar aceasta este doar o operaţiune matematică care poate estompa realitatea.

2. Sisteme dinamice

Teoria sistemelor dinamice este o teorie matematică care își are originea în mecanica newtoniană şi, cu maximum de generalitate, în formalismul Hamilton-Lagrange aplicabil şi la fenomene nemecanice. „*Faptul că un anumit sistem dinamic determinist poate fi avea soluții stabile sau haotice nu implică în mod necesar că fenomenul pe care se pretinde că îl descrie se comportă în mod similar, ceea ce depinde de calitatea modelului matematic*”[10]. Conceptul de sistem dinamic este util şi în studiul dinamicii populaţiilor.[11]

Teoria sistemelor dinamice (având originile în lucrările lui Newton şi Poincaré) este bine conturată azi ca disciplină[12]. Costrucţia cu adevărat ştiinţifică a descrierii naturii a debutat în istorie cu studiul celei mai simple forme de *mişcare* (compatibilă cu observaţiile la scară umană privind echilibrul şi mişcarea corpurilor) *mişcarea mecanică*. Ideea filosofică de *dinamică* (precedată de ideile de *statică* prin poziţia $\vec{r}$ şi *cinematică* prin viteza $\dot{\vec{r}}$) a fost fundamentată de Isaac Newton în lucrarea sa *Principiile matematice ale filozofiei naturale*[13]. La bază stau conceptele de *timp* (unidimensional ! - 1D) şi *spaţiu* (tridimensional ! - 3D, cu idealizările sale proiective 2D şi 1D). Conceptul de forţă $\vec{F}$ este definit calitativ şi cantitativ nu ca mărime primitivă, iar ceea ce numim în mod curent principiul al doilea al mecanicii $\vec{F} = d\vec{p}/dt \cong m \cdot \ddot{\vec{r}}$ (în care implicăm *cantitatea de mişcare* $\vec{p} = m \cdot \dot{\vec{r}}$ deci acceleraţia $\ddot{\vec{r}}$) este doar o *aproximare a unei bune definiţii* şi în care trebuia dintru început să ne punem problema dacă *masa inerţială* m (*mărime primitivă*) este sau nu

[7] Spiru Haret, *Mecanica socială*, Bucureşti, Editura Ştiinţifică, 1969, Editura Gramar, Colecţia Sinteze, Documente, Eseuri, 2001.

[8] Ana Bazac, „Spiru Haret - *Mecanica socială*: semnificaţii epistemologice”, *DIS/Studii și comunicări*, 2012, http://studii.crifst.ro/doc/2012/2012_4_02.pdf

[9] Vladimir Trebici, *Mică enciclopedie de demografie*, p 207.

[10] Philip Holmes, *A Short History of Dynamical Systems Theory. 1885-2007*, Encyclopedia Of Life Support Systems (EOLSS).

[11] Nicolas Bacaër, A Short History of Mathematical Population Dynamics, London, Springer-Verlag, 2011.

[12] Radu P. Voinea şi Ion V. Stroe, *Introducere în teoria sistemelor dinamice*, Bucureşti, Editura Academiei Române, 2000.

[13] Isaac Newton, *Principiile matematice ale filozofiei naturale*, Bucureşti, Editura Academiei RPR, 1956.

constantă în timp; astfel am fi descoperit mult mai devreme "*teoria relativităţii*". Oricum descrierea experimentală a altor *forme de existenţă ale materiei* (câmp electric, camp magnetic, câmp gravitaţional etc) se realizează prin interacţiunea cu "*corpuri de probă*" deci cu referire la mecanică.

Caracterul temporal al analizei impune extinderea conceptului de *reper spaţial* la acela de *reper temporal-spaţial* care include şi un mecanism de ceas (*cronometru* !). Dar şi conceptul de *mişcare* a trebuit să fie generalizat, evitând astfel ceea ce s-a numit concepţia "*mecanicistă*".

Cum, în domeniul mecanicii, corpurile pot avea în spatiul 3D două tipuri de mişcare, fundamental diferite, *translaţii* şi *rotaţii*, interacţiunile cu corpurile au fost denumite *pondero-motoare*. Rotaţiile pot genera mişcări periodice (cum este şi mişcarea planetelor); pe aceste rotaţii ar trebui să gândim *cronometrul*.

Din punct de vedere filosofic, *principiul cauzalităţii* este esenţial. *Când un fenomen ne apare ca fiind cauza altuia noi îl privim ca fiind anterior. Acesta este motivul pentru care noi definim timpul* (Poincaré). Importantă este însă precizarea că *două evenimente sunt simultane dacă nu se pot influenţa cauzal* (Einstein). Cauzalitatea induce, deci, o relaţie de *ordonare temporală*.

Scopul principal urmărit de *teoria sistemelor dinamice* este de a înţelege şi (*pre*- sau *ante*-) viziona comportamentul pe termen lung al stărilor unui sistem (a cărui evoluţie respectă deci principiul cauzalităţii !) pe baza unui model de *sistem dinamic*. Dacă în condiţiile ireversibilităţii timpului ne limităm doar la *pre*viziunea evoluţiei (obiectiv inclus în ingineria proiectării sistemului !) vom avea doar un model de *sistem semi-dinamic*.

Cu includerea unor factori aleatori, studiul sistemelor dinamice era deja conectat la problematica deosebit de importantă a *fiabilităţii*, dar studiul matematic aprofundat pe sisteme deterministe a evidenţiat, chiar pentru sisteme foarte simple, comportamentul complex de tip *haotic determinist* care face imposibilă previziunea pe termen lung. În sisteme cu timp continuu acest comportament poate apare doar începând cu cele 3D, dar în sisteme cu timp discret el poate apare chiar şi în cazul 1D.

Acesta este contextul în care s-a reactivat (*pentru definitiv* !) interesul inginerilor, oamenilor de ştiinţă în general şi desigur al filosofilor pentru studiul sistemelor dinamice cu etapele oligatorii: *modelarea fizică*, *modelarea matematică*, *simularea numerică*.

În *etapa de modelare fizică* (bazată pe legi fizice teoretice şi experimentale, în general neliniare) apar *variabile de stare* care sunt mărimi de interes, dar cu unităţi de măsură. Ele verifică (în timp continuu) ecuaţii diferenţiale sau (în timp discret) relaţii recursive.

În *etapa de modelare matematică* variabilele de stare sunt normate la constante specifice rezultând un *model matematic* cu variabile *fără dimensiuni fizice* ce pot fi introduse într-un *vector numeric* $\vec{s}$ (multi-dimensional) denumit generic *vector de stare*. Numai pe acest model se pot face studii calitative privind existenţa, unicitatea soluţiilor sau comportamentul lor asimptotic eventual *haotic*[14]. Operaţiunea de *adimensionalizare* este imperios necesară pentru ca utilizarea unor funcţii matematice în calculator să aibă sens (spre exemplu *nu putem logaritma şi unităţile de măsură*).

Studiul cantitativ este realizat în *etapa de simulare numerică*; pentru a evita numerele foarte mari (sau foarte mici,) matematicianul mai poate introduce o normare suplimentară, arbitrară.

Întregul proces de modelare necesită miloace complexe de caracterizare şi reprezentare (analogică, numerică, grafică, audio-vizuală) precum şi de achiziţie & prelucrare a unor *semnale multi-dimensionale*. Actualele echipamentele electronice, optice şi mecatronice asistate de calculator pot realiza în bună măsură previziunea dorită de inginerul proiectant, dar în nici un caz modelarea nu poate îmbunătăţi rezoluţia iniţială a achiziţiei datelor fizice; poate însă să filtreze anumite date de interes şi să calculeze indicatori tehnici / economici sau de calitate / fiabilitate.

[14] Eufrosina Otlăcan, "Matematica şi ştiinţele vieţii - naturale şi sociale", *Noema*, 2015, p. 358.

Dacă ne referim la formula completă a seriei Taylor, pentru predicţia pe termen lung θ a evoluţiei temporale a unei stări $\vec{s}(t) \Rightarrow \vec{s}(t+\theta)$:

$$\vec{s}(t+\theta) = \vec{s}(t) + \frac{1}{1!} \cdot \frac{ds}{dt} \cdot \theta + \frac{1}{2!} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} \cdot \theta^2 + \frac{1}{3!} \cdot \frac{d^3s}{dt^3} \cdot \theta^3 + ... + \frac{1}{k!} \cdot \frac{d^ks}{dt^k} \cdot \theta^3 + ...$$

constatăm că trebuie să calculăm o funcţie analitică (serie de puteri !), în care avem adunări, înmulţiri şi ridicări la puteri întregi, dar pentru a cărei determinare avem nevoie de cunoaşterea unui set teoretic infinit de valori ale derivatelor la un moment dat t. Prin renormare, matematic adecvată, se pot face rescalări astfel încât, cu $|\theta| << 1$, să asigurăm o convergenţă rapidă a seriei de puteri de mai sus.

Nu este foarte clar ce raţionament l-a determinat pe Newton să se oprească (în formularea celei de a doua legi a dinamicii) la acceleraţia poziţiei (nu şi la acceleraţii de ordin superior), deci în cazul unei forţe constante o ecuaţie diferenţială de ordinul doi care necesită drept condiţii iniţiale doar până la prima derivată (poziţia şi viteza iniţială). Derivatele de ordin superior împreună şi cu alte neliniarităţi par a fi incluse în expresia *forţei*. În formalismul Hamilton-Lagrange mărimile de stare dinamică sunt *poziţiile* şi *impulsurile* generalizate.

În fapt stările unui sistem dinamic satisfac ecuaţii difenţiale de ordin superior dar, în teoria generală a sistemelor dinamice, derivatele de ordin superior care intervin sunt redenumite drept variabile de stare suplimentare redefinind astfel conceptul de *stare dinamică* $\vec{s}$ ca un vector n-dimensional.

3. Ecuaţia de evoluţie a unui sistem dinamic

Evoluţia temporală a vectorului de stare $\vec{s}$ a unui sistem dinamic poate fi o funcţie *polivalentă*, cu mai multe *ramuri* (proprii sistemului dinamic) ce constituie un alfabet al stărilor şi pe care este definită o distribuţie de *probabilităţi*. Selecţia unei ramuri corespunde unei evoluţii strict deterministe şi se realizează prin certitudinea de condiţie iniţială asociată cu certitudinea menţinerii pe ramură. În cazul unei incertituni asupra condiţiilor iniţiale avem o evoluţie deterministă multiplă cu start aleator. Dacă se adaugă şi incertitudinea privind menţinerea pe ramură avem o evoluţie complet aleatoare (cu restart permanent aleator) staţionarizabilă sau nu, ergodică sau nu, dar cu condiţionări probabiliste (în lanţ de tip Markov).

Notă: condiţionarea probabilistă de tip Markov exprimă ideea că sistemul a cărui stare curentă o urmărim are posibilitatea internă de a memora starea anterioară, iar dacă structura sa internă este invariantă în timp el admite o distribuţie staţionară de probabilităţi pe alfabetul stărilor ce poate fi implementată constructiv chiar la momentul iniţial ceea ce e face ca evoluţia stării (care nu este statică) să o declarăm staţionarizată, iar dacă medierea în timp oferă acelaşi rezultat ca şi medierea statistică (la un moment dat) pe un colectiv statistic de replici (clone) ale sistemului studiat, spunem că se manifestă proprietatea de ergodicitate. Deşi ipoteza ergodicităţii este adoptată în multe situaţii practice, este de precizat că majoritatea sistemelor naturale nu sunt ergodice şi astfel în evoluţia lor temporală probabilistă pot produce mari surprize de comportament.

În toate cazurile vorbim de o *determinare cauzală* a vectorului de stare $\vec{s}$ la un moment dat, drept efect al vectorului de stare $\vec{s}_0$ de la momentul iniţial, cu referire la caracteristicile distribuţiei de probabilitate pe alfabetul stărilor (în particular cu referire la funcţia univalentă în cazul evoluţiei strict deterministe).

Referindu-ne la o evoluţie a stării, strict deterministă dar *diferenţiabilă*, dezvoltarea în serie Taylor (cu rest de ordinul întâi) $\vec{s}(t+\theta) - \vec{s}(t) = [\dot{\vec{s}}(t) + \mathcal{O}(\vec{s}(t),\theta)] \cdot \theta$ unde $\lim_{\theta \to 0} \mathcal{O}(\vec{s}(t),\theta) = 0$ arată că *posibilitatea predicţiei cauzale* $\vec{s}(t) \Rightarrow \vec{s}(t+\theta) \cong \dot{\vec{s}}(t) \cdot \theta$, "*din aproape în aproape*" ($\theta \to 0$), revine la cunoaşterea permanentă a vectorului viteză $\dot{\vec{s}}(t)$ ca funcţie de vectorul de stare $\vec{s}(t)$

(implicat într-o *ecuaţie diferenţială* de ordinul întâi în raport cu timpul) $\dot{\vec{s}}(t)=\vec{F}_{\xi}(\vec{s}(t),\vec{q}(t))$ prin intermediul unui *operator vectorial* $\vec{F}_{\xi}(\vec{s},\vec{q})$, *caracteristic* sistemului dinamic, în general neliniar şi în structura căruia avem: un *parametru de control* $\vec{\xi}$, o *comandă externă* $\vec{q}(t)$ şi o *condiţie iniţială*. Astfel forma completă a sistemului dinamic este $\dot{\vec{s}}(t)=\vec{F}_{\xi}(\vec{s}(t),\vec{q}(t))$; $\vec{s}(t_0)=\vec{s}_0$ & $\vec{q}(t_0)=\vec{q}_0$ iar caracterul său neliniar trebuie judecat în raport şi cu condiţia iniţială. Dependenţa explicită în raport cu o comandă externă $\vec{q}(t)$ reprezintă caracterul *neautonom* al sistemului dinamic; Dinamica cronometrului ar trebui identificată cu aceea a comenzii externe dar, înglobând parametrii comenzii externe în parametrul de control, uzual se consideră $\vec{q}(t)\equiv t$ şi vorbim despre o dependenţă explicită de timpul t.

Exprimarea matematică pentru *principiul determinismului cauzal* constă în aceea că la condiţii iniţiale date soluţia este univocă. Astfel există un *operator fundamental de evoluţie*, $\vec{\vec{\mathbf{U}}}_{\xi,\vec{s}_0}(\vec{q},\vec{q}_0)$ încât soluţia generală a sistemului dinamic este $\vec{s}(t)=\vec{\vec{\mathbf{U}}}_{\xi,\vec{s}_0}(\vec{q}(t),\vec{q}_0)\cdot\vec{s}_0$ cu $\vec{\vec{\mathbf{U}}}_{\xi,\vec{s}_0}(\vec{q}(t_0),\vec{q}_0)=\vec{\vec{1}}$. Operatorul de evoluţie conţine întreaga "informaţie" privind *dinamica sistemului*; precizarea stării iniţiale nu face decât să adauge posibilitatea prezicerii stărilor ulterioare. Putem efectua, însă, studiul dinamicii vectorului de stare $\vec{s}(t)$ *în jurul* unei stări de referinţă $\vec{s}_{\alpha}=s(t_{\alpha})$ (stare „blocată" - „îngheţată") la un moment de referinţă t_{α} (arbitrar !) unde $\vec{q}_{\alpha}=\vec{q}(t_{\alpha})$, iar $\vec{s}(t)-\vec{s}_{\alpha}$ este deviaţia stării curente faţă de starea de referinţă; *operatorul vectorial caracteristic* se poate exprima (din punct de vedere matematic) sub forma $\vec{F}_{\xi}(\vec{s},\vec{q})=\vec{\vec{\mathbf{W}}}_{\xi}(\vec{s},\vec{q},\vec{s}_{\alpha},\vec{q}_{\alpha})\cdot(\vec{s}-\vec{s}_{\alpha})+\vec{F}_{\xi}(\vec{s}_{\alpha},\vec{q}_{\alpha})$ unde $\vec{\vec{\mathbf{W}}}_{\xi}(\vec{s},\vec{q},\vec{s}_{\alpha},\vec{q}_{\alpha})$ este un operator de nivel superior (acţionând asupra unui vector) care înglobează şi caracterul neliniar al operatorului vectorial caracteristic $\vec{F}_{\xi}(\vec{s},\vec{q})$. Starea "îngheţată" $\vec{s}_{\alpha}$ poate fi starea iniţială $\vec{s}_0=s(t_0)$ sau o stare (asimptotic) *finală* $\vec{s}_{\infty}=s(t_{\infty}\leq\infty)$ sau una (numită şi de echilibru) *staţionară* $\vec{s}_{*}$ dacă există.

Aceasta din urmă este definită, în condiţiile existenţei comportamentului asimptotic:

$$\exists\, t_{*}\ \&\ \lim_{t\to t_{*}}\vec{s}(t)=\vec{s}(t_{*})=\vec{s}_{*}\ ;\ \lim_{t\to t_{*}}\vec{q}(t)=\vec{q}(t_{*})=\vec{q}_{*},$$

de ecuaţia: $\vec{F}_{\xi}(\vec{s}_{*},\vec{q}_{*})=\lim\limits_{t\to t_{*}}\vec{F}_{\xi}(\vec{s}(t),\vec{q}(t))=\lim\limits_{t\to t_{*}}\dfrac{d\vec{s}(t)}{dt}=\dfrac{d}{dt}\lim\limits_{t\to t_{*}}\vec{s}(t)=\dfrac{d\vec{s}_{*}}{dt}=0$.

În forma matematică completă a sistemului dinamic *starea iniţială* (firească din punct de vedere fizic şi cauzal) poate fi înlocuită cu *starea „îngheţată"*. Prin reprezentări tensoriale adecvate studiul se poate relativiza deci astfel:

a) relativizare la o stare iniţială $\vec{s}_0$*, cauzal cunoscută*

$$\vec{F}_{\xi}(\vec{s},\vec{q})=\vec{\vec{\mathbf{X}}}_{\xi}(\vec{s},\vec{q},\vec{s}_0,\vec{q}_0)\cdot(\vec{s}-\vec{s}_0)+\vec{F}_{\xi}(\vec{s}_0,\vec{q}_0)$$

b) relativizare la o stare finală $\vec{s}_{\infty}$*, experimental cunoscută*

$$\vec{F}_{\xi}(\vec{s},\vec{q})=\vec{\vec{\mathbf{Y}}}_{\xi}(\vec{s},\vec{q},\vec{s}_{\infty},\vec{q}_{\infty})\cdot(\vec{s}-\vec{s}_{\infty})+\vec{F}_{\xi}(\vec{s}_{\infty},\vec{q}_{\infty})\ ,\ \ \vec{s}_{\infty}=\vec{\vec{\mathbf{U}}}_{\xi,\vec{s}_0}(\vec{q}_{\infty},\vec{q}_0)\cdot\vec{s}_0$$

b) relativizare la o stare de echilibru $\vec{s}_{*}$*, specifică sistemului*

$$\vec{F}_{\xi}(\vec{s},\vec{q}) = \vec{\vec{\mathbf{A}}}_{\xi}(\vec{s},\vec{q},\vec{s}_*,\vec{q}_*)\cdot(\vec{s}-\vec{s}_*) \ , \ \vec{s}_* = \vec{\vec{\mathbf{U}}}_{\xi,\vec{s}_0}(\vec{q}_*,\vec{q}_0)\cdot\vec{s}_0$$

Aceasta este utilă dacă aproximăm *sistemul dinamic neliniar* cu *sistemul dinamic liniarizat asociat* ce se obţine (pentru deviaţii mici faţă de echilibru) înlocuind operatorul neliniar $\vec{\vec{\mathbf{A}}}_{\xi}(\vec{s},\vec{q},\vec{s}_*,\vec{q}_*)$ cu cel diferenţial $\vec{\vec{\mathbf{J}}}_{\vec{F}_{\xi}(\vec{s},\vec{q})}(\vec{s}_*,\vec{q}_*)$, care este liniar (matricea lui Jacobi - valoare punctuală în situaţia de echilibru).

Obs.: în cazul sistemului dinamic *autonom* dependenţa de comanda externă $\vec{q}(t)$ fie nu există, fie dacă nu este suprimată avem $d\vec{q}(t)/dt \equiv \vec{0}$ şi putem îngloba valoarea constantă $\vec{q}$ în parametrul de control $\vec{\xi}$ astfel că nu mai avem dependenţă explicită de timpul t iar sistemului dinamic are forma matematică mai simplă $\dot{\vec{s}}(t) = \vec{F}^{aut}_{\vec{\xi}}(\vec{s}(t))\, ;\, \vec{s}(t_0) = \vec{s}_0$ *cu starea staţionară soluţie a ecuaţiei* $\vec{F}^{aut}_{\vec{\xi}}(\vec{s}_*) = 0$. Un *sistem dinamic neautonom* se poate studia ca un *sistem dinamic autonom în format extins* înglobând comanda externă într-un sistem extins, parametrii de control ai comenzii externe într-un parametru de control extins, deci cu preţul creşterii dimensiunii spaţiului stărilor şi redefinind starea în format extins $\vec{\sigma}(t) = [\vec{s}(t),\vec{q}(t)]$. Dacă anterior eram în situaţia $\vec{q}(t) \equiv t$ atunci $\vec{\sigma}(t) = [\vec{s}(t), t]$, dimensiunea stării creşte doar cu o unitate iar ecuaţia diferenţială a sistemului dinamic se completează doar cu ecuaţia $dt/dt \equiv 1$ şi avem $\vec{F}^{aut}_{\vec{\xi}}(\vec{\sigma}(t)) = [\vec{F}_{\vec{\xi}}(\vec{\sigma}(t)), 1]$.

4. Modele cu o singură specie

Pentru o singură specie de populaţie, considerăm o analiza pe model matematic de sistem dinamic, unidimensional, autonom, în timp continuu. Unica variabilă de *stare* a sistemului este mărimea populaţiei $p(t) \equiv s(t)$ iar sistem dinamic este $\dot{s} = F(s)\, ;\, s(t_0) := s_0$ unde, eventual, starea iniţială se poate înlocui cu $s_\infty := \lim_{t\to\infty} s(t)$ dacă experimental se mizează pe comportamentul asimptotic conform căruia există o valoare stabilă către care tinde populaţia după un timp îndelungat. Dacă avem în vedere săgeata timpului şi principiul cauzalităţii, domeniul de definiţie trebuie ales de forma $[t_0,\infty)$ unde momentul iniţial de timp t_0 corespunde cu “naşterea obiectivă a sistemului” sau cu “naşterea subiectivă a observatorului”. Nu vom introduce o limitare superioară a domeniului temporal de definiţie deşi practic, în lumina teoriei haosului determinist, nici un sistem nu pare să dureze o veşnicie; natura unei astfel de limitări este din punct de vedere practic legată de conceptul probabilist al *duratei de viaţă* (reglementat prin “documente normative”) iar din punct de vedere matematic este legată fie de analiza asimptotică fie de posibilitatea teoretică de a periodiza matematic funcţiile cu suport temporal compact - singurele care există cu adevărat în natură.

Deoarece timpul este măsurat (*pe baza unui fenomen periodic*) de un ceasornic cu o viteză unghiulară $\omega_c = d\varphi/dt$ specifică acului (*secundar, minutar, orar, ...*) vom utiliza, în locul variabilei “timp” t, unghiul de fază temporală $\varphi = \omega_c \cdot t$ al ceasornicului. Faza iniţială este deci $\varphi_0 = \omega_c \cdot t_0$. Viteza unghiulară a ceasului trebuie să fie adecvată la sistemul dinamic în sensul că se recomandă a alege pentru ω_c o pulsaţie proprie (*caracteristică*) sistemului; deci trebuie lucrat cu un ceas potrivit (*perioada ceasului trebuie să fie o constantă de timp caracteristică fenomenelor din sistem*).

Notă: conceptele de fază temporală şi pulsaţie temporală (derivată din fază) sunt standardizate şi ar trebui utilizate în orice împrejurare când este vorba de a descrie o dinamică. Astfel se ajunge la înlocuirea variabilei timp cu conceptul de fază temporală (unghi de fază) deoarece are o semnificaţie mult mai apropiată de practică atunci când trebuie să evidenţiem fenomene ciclice chiar şi sub aspect filosofic[15]; în fizica cuantică noţiunea de pulsaţie temporală face legătura directă cu conceptul de spectru energetic.

De principiu, pe întreg domeniul său de existenţă, o variabilă de stare $s(t)$ nu poate fi nemărginită (din considerente fizice sau *alte considerente*) deci $\exists\, A > 0$ astfel încât $\forall\, t \geq t_0 \Rightarrow |s(t)| \leq A$; putem efectua în codomeniu o translaţie de pas A şi o scalare de factor $1/2 \cdot A$ încât cu variabila de *stare normată* $x(\varphi) := [1 + s(\varphi/\omega_c)/A]/2$ *sistemul dinamic* (adimensional) este:

$$\frac{dx}{d\varphi} = f(x) \;;\; x(\varphi_0) := x_0 \;\text{ cu }\; f(x) := \frac{F(A \cdot [2 \cdot x - 1])}{2 \cdot A \cdot \omega_c} \;\text{ şi }\; x_0 = x(\varphi_0) = \frac{1}{2} \cdot \left[1 + \frac{s_0}{A}\right]$$

Dacă $x(\varphi) \equiv x_* \in [0,1]$, $\forall \varphi \geq \varphi_0$ este o stare de echilibru atunci $dx_*/d\varphi = 0$ şi deci $f(x_*) = 0$; studiem starea x în vecinătatea stării x_*. În dorinţa de a efectua calcule pur algebrice adoptăm *ipoteza analiticităţii* aproximând funcţia $f(x)$ cu o serie Taylor în jurul stării de echilibru x_*.

$$f(x) = f(x_*) + a_1 \cdot (x - x_*) + a_2 \cdot (x - x_*)^2 + \ldots = a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \ldots \qquad z = x - x_*$$

Analiticitatea (aproximarea cu un şir de polinoame) este o ipoteză ce trebuie acceptată cu mare atenţie privind compatibilitatea sensului practic cu sensul teoretic (matematic), în modelarea cu sisteme dinamice a fenomenelor, deoarece este o limitare a modelului. Polinoamele sunt funcţii algebrice (bazate doar pe adunare, adunare repetată = înmulţire, înmulţire repetată = ridicare la putere - ceea ce este bine pentru calculator) însă este posibil ca fenomenul studiat să aibă o importantă determinare calitativă de tip transcendent (exponenţiere, logaritmare etc).

Ecuaţia diferenţială a sistemului dinamic devine $dz/d\varphi = a_1 \cdot z + a_2 \cdot z^2 + \ldots$ iar în aproximaţia de primul ordin (deviaţii mici faţă de starea de echilibru şi $a_1 \neq 0$; fără a restrânge generalitatea putem considera $|a_1| = 1$) avem $dz/d\varphi = \pm z$ sau în varianta temporală $dz/dt = \pm\omega_c \cdot z$. Când viteza de variaţie a deviaţiei unei mărimi faţă de o valoare de echilibru este proporţională cu mărimea deviaţiei respective avem chiar ipoteza de bază din termodinamica liniară a proceselor ireversibile, în care un "*flux termodinamic*" este în primă aproximaţie (pentru stări apropiate de echilibru) proporţional cu o "*forţă termodinamică*".

Coeficientul de proporţionalitate trebuie să aibă semnificaţia unei viteze unghiulare (pulsaţie temporală) inclusiv sub aspect dimensional $[\omega_c] = rad/s$. O justificare interesantă a acestei idei o avem în mecanică referitor la aspectul pur cinematic al mişcării (premergător dinamicii lui Newton). La mişcarea circulară uniformă (care oferă chiar un *model de ceasornic*) variabila de stare este poziţia $\vec{r}$ iar viteza sa de variaţie are expresia cunoscută $\vec{v} = d\vec{r}/dt = \vec{\omega} \times \vec{r}$ unde $\vec{\omega}$ este viteza unghiulară. Deoarece $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$ unde $\vec{\tau}$ este versorul tangent la traiectorie, iar $\vec{\omega}$ este astfel încât $(\vec{r}, \vec{\tau}, \vec{\omega})$ formează un triedru orthogonal, avem că: starea de echilibru (cu viteză nulă) este $\vec{r}_* = \vec{0}$ şi atunci $\vec{r}$ este chiar deviaţia faţă de starea de echilibru - proporţionalitatea în discuţie are un caracter vectorial; $v = \omega \cdot r$ unde dacă triedrul ortogonal este dextrogir avem $\omega > 0$ şi rotaţia se efectuează (după regula burghiului drept) în sens trigonometric progresiv (invers acelor de ceasornic) iar dacă triedrul ortogonal este levogir avem $\omega < 0$ şi rotaţia se efectuează (după regula burghiului stâng) în sens trigonometric regresiv (direct acelor de ceasornic).

Proporţionalitatea din aproximaţia de primul ordin $dz/dt = \pm\omega_c \cdot z$ scrisă sub forma $dz/z = \pm\omega_c \cdot dt = \pm d\varphi$ interpretează *variaţia diferenţială relativă* $dz/z = d(\ln|z|)$ (*increment*

[15] Vasile Conta, *Teoria fatalismului - Teoria ondulaţiei universale*, Iaşi, Editura Junimea, 1995.

logaritmic !) drept *deviaţie unghiulară diferenţială* $\pm d\varphi$, în timp ce *viteza unghiulară* a ceasornicului (pe care de o manieră generală o vom numi "*pulsaţie temporală*") este interpretabilă ca o viteză logaritmică denumită *increment logaritmic* sau *decrement logaritmic* temporal.

$$\omega_c = \pm\frac{d\ln(|z|)}{dt}$$

4.1 Modelul lui Malthus

Dinamica populaţiei în acest model este descrisă de o ***pulsaţie constantă***: $d\ln[p(t)]/dt = \omega_0$ ($\omega_0 > 0$ *increment;* $\omega_0 < 0$ *decrement*) astfel încât ecuaţia diferenţială a sistemului dinamic (autonom şi liniar) este: $dp/dt = \omega_0 \cdot p$, deci viteza de "creştere" a populaţiei este proporţională cu populaţia de la momentul curent. Integrarea duce imediat la o soluţie exponenţială: $p(t) = p(t_0)\cdot e^{\omega_0\cdot(t-t_0)}$. Dacă încercăm o verificare experimentală[16], pornind de la anul 1961 cu o statistică de 2·% creştere anuală avem $p(t) = 3.06\cdot 10^9 \cdot e^{0.02\cdot(t-1961)}$. În intervalul $t \in [1700, 1961]$ soluţia concordă surprinzător! Populaţia s-a dublat la fiecare 35 de ani şi ar trebui să avem: *în anul 2510* - 200000 *miliarde locuitori; în anul 2670* - 3 600 000 *miliarde locuitori.*

Legea se verifică pentru un număr moderat de indivizi şi la alte specii. Legea nu se verifică pentru un număr mare de indivizi, deoarece nu se ia în consideraţie faptul că membrii speciei intră în conflicte de interese privind *spaţiul* sau *resursel*e, ceea ce introduce neliniaritate în sistemul dinamic.

4.2 Corecţii la Modelul lui Malthus

Corecţiile analitice şi de neliniaritate constau în aceea că dinamica populaţiei este *comandată extern* prin doi "*coeficienţi vitali*" astfel:

- *pulsaţie temporală* $\omega(t)$ ajustabilă [$\omega(t) > 0$ - *increment;* $\omega(t) < 0$ - *decrement*],
- *pondere de neliniaritate* $\delta(t) \neq 0$ pentru o *neliniaritate de exponent* $\alpha \neq 1$,

încât dinamica populaţiei p este descrisă de ecuaţia: $\frac{d}{dt}\ln[p(t)] = \omega(t) - \delta(t)\cdot[p(t)]^{\alpha-1};\ \ t \geq t_0$.

Sistemul dinamic este neliniar şi neautonom cu ecuaţia (de tip Bernoulli) $\frac{dp}{dt} = \omega(t)\cdot p - \delta(t)\cdot p^{\alpha}$ care se integrează după cum urmează:

$$[p(t)]^{1-\alpha} = e^{(1-\alpha)\cdot\varphi(t)}\cdot\left[p(t_0) + (\alpha-1)\cdot\int_{t_0}^{t}\delta(t')\cdot e^{(\alpha-1)\cdot\varphi(t')}\cdot dt'\right];\quad \varphi(t) = \int_{t_0}^{t}\omega(t')\cdot dt'$$

Cazul $\alpha \neq 1$ trebuie exclus ca fiind trivial, iar prin corecţia de neliniaritate cu $\delta > 0 < \alpha$ se ia în consideraţie posibilitatea unei componente de scădere a vitezei de creştere dp/dt pe măsură ce populaţia p creşte. S-a introdus şi un caracter posibil neautonom prin intermediul coeficienţilor vitali dependenţi de timp deoarece chiar şi în această situaţie există soluţie analitică.

4.2.1 Modelul Verhulst - Curba logistică

Acest model este caz particular al modelului precedent cu *exponent de neliniaritate* $\alpha = 2$, "*coeficienţii vitali*" constanţi $\omega(t) :\equiv \omega_0$ & $0 \neq \delta_0 \equiv: \delta(t)$, astfel că dinamica populaţiei are o

[16] WEB, Total Population of the World by Decade, 1950-2050 *(historical and projected)* https://www.infoplease.com/world/population-statistics/total-population-world-decade-1950-2050

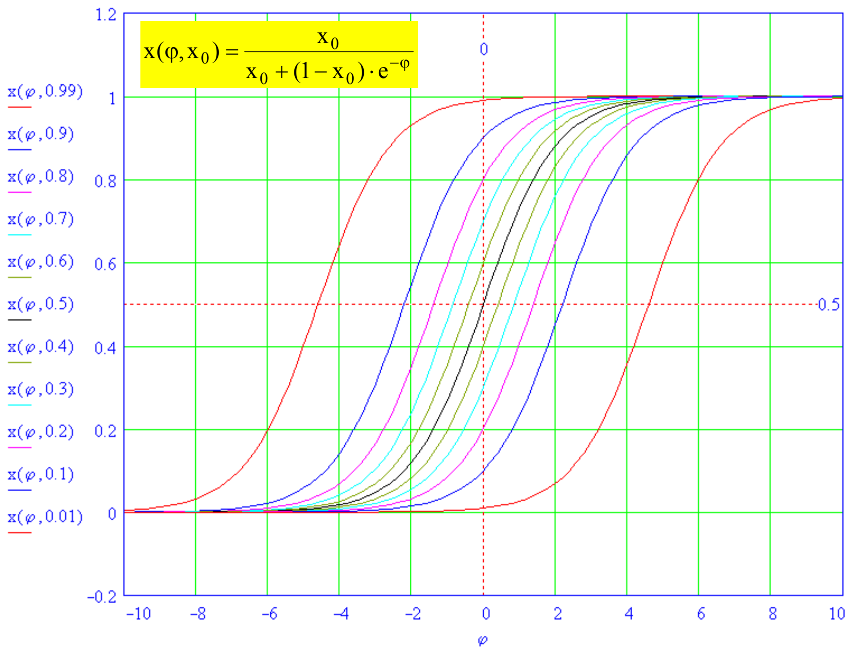
variaţie, liniar-descrescătoare cu p, a vitezei logaritmice: $\frac{d}{dt}\ln[p(t)] = \omega_0 - \delta_0 \cdot p(t)$; $t \geq t_0$. Sistemul dinamic este autonom şi neliniar, cu ecuaţia diferenţială (de tip Bernoulli) $dp/dt = \omega_0 \cdot p - \delta_0 \cdot p^2$ şi *condiţia iniţială* $p(t_0) := p_0$. Justificarea statistică (*de creştere a populaţiei* p *într-un mediu limitat* !) constă în aceea că numărul de conflicte (între câte doi membri !) este proporţional cu produsul $p \cdot p = p^2$.

Valoarea *staţionară nenulă*, pentru care $\frac{dp}{dt} = 0$, este $p_* := \frac{\omega_0}{\delta_0}$, $\begin{matrix} p_* \sim \omega_0 \\ p_* \sim 1/\delta_0 \end{matrix}$ iar integrarea şi interpretarea (facilitată de variabile natural normate) se efectuează astfel:

- *populaţia normată* (adimensională): $x = x(t) = \frac{p(t)}{p_*}$; $x_0 := x(t_0) = \frac{p_0}{p_*}$; $x_* = \frac{p_*}{p_*} = 1$
- *faza temporală* (timpul normat): $\varphi(t) = \omega_0 \cdot (t - t_0)$; $\varphi_0 = \varphi(t_0) = 0$; $d\varphi = \omega_0 \cdot dt$
- $\frac{dp}{dt} = \omega_0 \cdot p \cdot \left(1 - \frac{p}{p_*}\right)$, $\frac{dx}{dt} = \omega_0 \cdot x \cdot (1 - x)$; pentru $0 \neq x(t) \neq 1$ se integrează astfel:

$$\frac{dx}{d\varphi} = x \cdot (1 - x),\ \frac{d}{dx}\ln\left|1 - \frac{1}{x}\right| = -\frac{d\varphi}{dx},\ \ln\frac{(1 - x^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(x - 1)}{(1 - x_0^{-1}) \cdot \mathrm{sign}(x_0^{-1} - 1)} = -\varphi$$

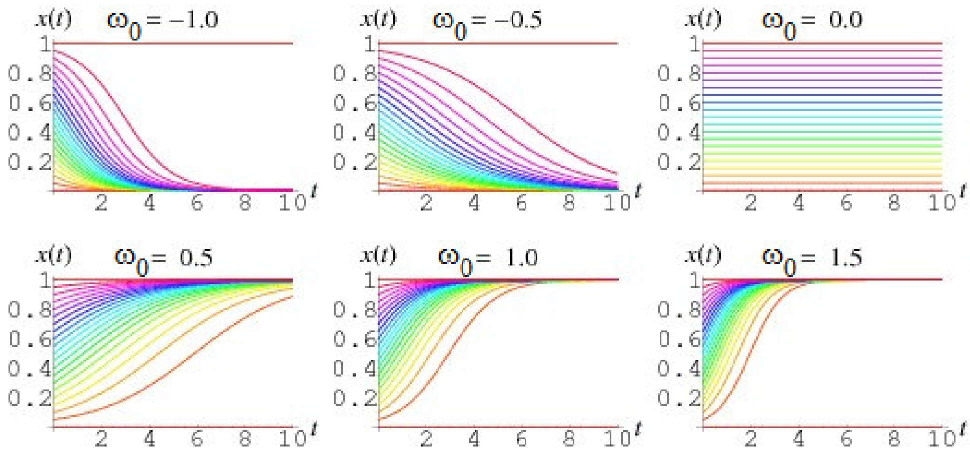
Tranzitul populaţiei (normate) x prin valorile 0 sau 1 trebuie interzise deoarece viteza dp/dt ar fi nulă; excludem deci anumite schimbări de semn cu $\mathrm{sign}(x) \equiv \mathrm{sign}(x_0)$ & $\mathrm{sign}(x - 1) \equiv \mathrm{sign}(x_0 - 1)$ astfel că soluţia $\varphi = \ln\frac{1 - x_0^{-1}}{1 - x^{-1}}$, ca funcţie inversă, este de tip *log*aritmic (*log*istic - *termenul nu are legătură cu termenul militar logistică*[17]);



[17] WEB, Logistic function, https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function

ca funcţie directă $x(\varphi)$ soluţia este $x = \dfrac{1}{1+\sigma\cdot e^{-\varphi}}$ cu $\sigma = x_0^{-1} - 1$. Forma $x = \dfrac{x_0}{x_0 + (1-x_0)\cdot e^{-\varphi}}$ este verificată şi de cazurile triviale $x_0 = 0$ & $x_0 = 1$, cu reprezentări ca în figura anterioară.

Ca funcţie de timpul t şi cu $t_0 := 0$ comportarea soluţiei $x(t) = \dfrac{x_0}{x_0 + (1-x_0)\cdot e^{-\omega_0\cdot t}}$ pentru diverse condiţii iniţiale $x_0 \in [0,1]$ şi având ca parametru pulsaţia temporală ω_0 este ca în figură:



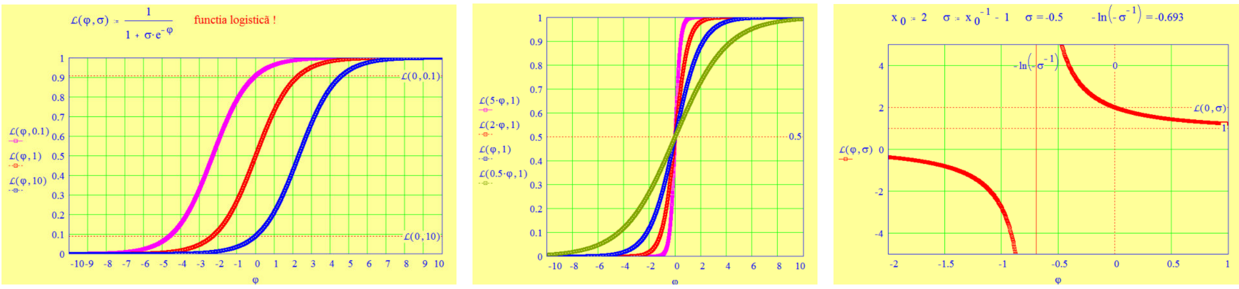
Curbele prezintă *inflexiune* la $x_I = x(\varphi_I) = 1/2$ pentru $\varphi_I := \varphi_0 + \ln\left(\dfrac{x_*}{x_0} - 1\right) = \ln\left(\dfrac{1}{x_0} - 1\right)$ respectiv $t_I := t_0 + \dfrac{1}{\omega_0}\cdot\ln\left(\dfrac{p_*}{p_0} - 1\right)$; pentru $t < t_I$ variaţia este rapidă, pentru $t > t_I$ variaţia este lentă. Pentru $\omega_0 > 0$ populaţia creşte de la valoarea iniţială până se stabilizează asimptotic către o valoare maximă (creşterea este mai rapidă pentru valori pozitive mari ale pulsaţiei ω_0); pentru $\omega_0 < 0$ populaţia scade de la valoarea iniţială până se stabilizează asimptotic către extincţie (scăderea este mai rapidă pentru valori puternic negative ale pulsaţiei ω_0); modelul surprinde matematic şi cazul populaţiei constante (la valoarea iniţială) pentru care $\omega_0 = 0$.

Curba logistică exprimă, îndeosebi, procese şi fenomene economice de lungă durată a căror creştere (există populaţie, există şi natalitate) se stinge sau se autofrânează (există populaţie, există şi mortalitate, chiar şi în cazul izolat de mediul exterior din cauza conflictelor interne) pe măsură ce se apropie de o anumită limită. “*Treptat, curba logistică şi-a pierdut din actualitate, iar încercările de a găsi legi de creştere a populaţiei sunt astăzi repudiate. Totuşi, curba logistică este folosită astăzi pentru proiectări demografice pe termen lung. Este utilă în special în cazurile în care o populaţie tinde spre o stare particulară, aceea a unei populaţii staţionare. În schimb, curba logistică are un vast câmp de aplicare în econometrie, în studiul cererii de bunuri de folosinţă îndelungată, în teoria proceselor de aprovizionare, amortizări, înlocuiri etc.*” [18]

Funcţia logistică standard $\mathcal{L}_\sigma(\varphi) = \dfrac{1}{1+\sigma\cdot e^{-\varphi}}$ cu aspect **s**igmoidal ($\mathcal{S}$ *alungit*) poate fi utilizată şi în modelarea altor fenomene decât evoluţia unei populaţii biologice, dar cu semnificaţii

[18] Vladimir Trebici, *Mică enciclopedie de demografie*, p 308.

analoge (deci bio-inspirate). Prin rescalarea şi deplasarea argumentului ea poate aproxima foarte bine funcţia rampă, funcţia treaptă (Heaviside), cicluri de histerezis, fenomene de bistabilitate, populaţii de electroni pe nivele energetice, etc. Condiţia iniţială supraunitară necesită încă interpretări.



În teoria probabilităţilor şi statistică, distribuția logistică este o distribuție continuă de probabilitate. Funcția sa repartiţie (de distribuție cumulativă) este funcția logistică care apare în regresia logistică şi în rețele neuronale. Aceasta seamănă cu distribuția normală, dar are cozi mai grele (aplatisare mai mare)[19].

Următoarele observaţii sunt importante:

O1) Dacă pentru Terra (Verhulst / SUA)[20] considerăm: $\omega_0 = 29 \cdot 10^{-3} \cdot \mathrm{rad/s} = 915 \cdot 10^3 \cdot \mathrm{loc/an}$; $\delta_0 = 2941 \cdot 10^{-15} \cdot (\mathrm{rad/s})/\mathrm{loc} \cong 93/10^6 \cdot \mathrm{loc} \cdot \mathrm{an}$; $p_* = 9.9 \cdot 10^9 \cdot \mathrm{loc}$, deci populaţia actuală de $7.5 \cdot 10^9 \cdot \mathrm{loc}$ (în anul 2019) a atins nivelul de $70 \cdot \% \cdot p_*$ şi urmează saturaţia dacă nu intervin alte modele mai realiste (care să ia în consideraţiune şi alţi parametri).

O2) Curba logistică este totuşi contrazisă de experienţa statistică; se confirmă pe o populaţie numeroasă, dar nu se confirmă pe populaţii mici şi dense (ex: Belgia!).

O3) În cazul unei populaţii suficient de numeroasă, aceasta oscilează; datorită unor epidemii, apare "mortalitatea"... apoi iar "natalitatea".

O4) Coeficienţii "vitali" sunt cvazi-constanţi doar pe porţiuni de timp şi trebuie recalculaţi atunci când previziunile modelului se abat cu prea multe procente de la datele experimentale reale sau atunci când evaluările lor la nivel de ţară sau continent prezintă o dispersie prea mare datorită unor cauze geopolitice.

4.2.2 Modelul Volterra

Se ia în consideraţie *"ereditatea"* sub formă de ecuaţie integro-diferenţială:

$$\frac{d}{dt}\ln[p(t)] = \omega_0 - \delta_0 \cdot p(t) + \int_{t_0}^{t} k(t,t') \cdot p(t') \cdot dt'; \quad p(t) \neq 0$$

unde $k(t,t')$ este un "*nucleu*" de integrare a eredităţii; se consideră deci un termen suplimentar ca o superpoziţie liniară continuă, ponderată de "nucleu", a tuturor valorilor (populaţiei) anterioare momentului curent t (dar nu mai devreme de momentul iniţial t_0, considerând că ce a fost anterior acestuia este deja incorporat în condiţia iniţială a problemei). Un caz particular este nucleul de integrare "*time-invariant*" (funcţie doar de durata $t'-t$) $k(t,t') = k_{inv}(t'-t)$ considerând deci că ereditatea se manifestă la fel indiferent de originea pe axa timpului fiind caracteristică speciei în

[19] WEB, Logistic distribution, https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_distribution
[20] Nicolas Bacaër, A Short History of Mathematical Population Dynamics, London, Springer, 2011.

orice epocă; o ipoteză grosieră comodă pentru calcule numerice este nucleul constant $k_{inv}(t'-t)=k$ considerând ca nivelele populaţiei de la momentele anterioare au aceeaşi influenţă ereditară. Avem în acest ultim caz:

$$\frac{1}{p(t)}\cdot\frac{d}{dt}p(t)=\omega_0-\delta_0\cdot p(t)+k\cdot\int_{t_0}^{t}p(t')\cdot dt' \quad \textit{respectiv} \quad p\cdot\frac{d^2p}{dt^2}=\left(\frac{dp}{dt}\right)^2-\delta_0\cdot p^2\cdot\frac{dp}{dt}+k\cdot p^3$$

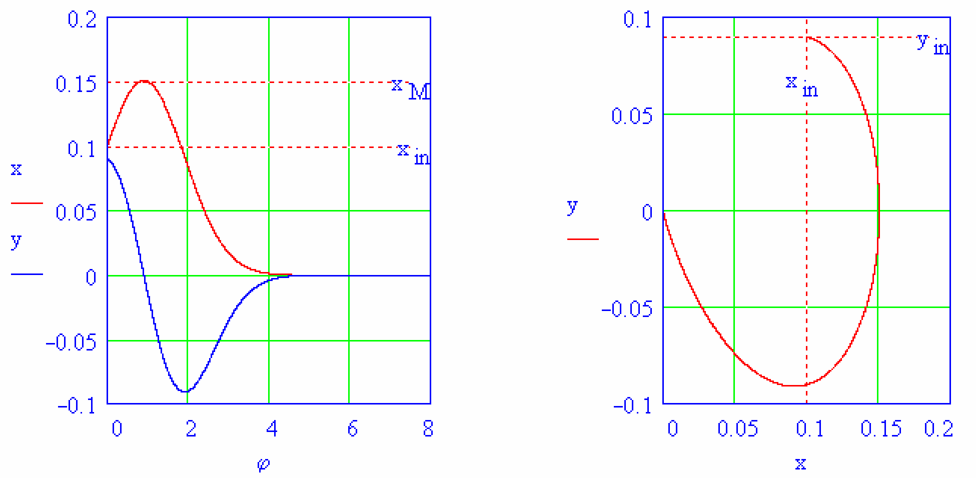
Cu condiţiile iniţiale $p(t_0)=p_0\neq 0$, $p'(0)=p_0\cdot(\omega_0-\delta_0\cdot p_0)$, adimensionalizarea $x=p/p_*\neq 0$, $\varphi=\omega_0\cdot(t-t_0)$, $\lambda=k/\omega_0\cdot\delta_0$, $p_*=\omega_0/\delta_0$ avem o ecuaţie diferenţială de ordinul 2 - neliniară:

$$x\cdot\frac{d^2x}{d\varphi^2}=\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)^2-x^2+\lambda\cdot x^3;\quad x(0)=x_0=\frac{p_0}{p_*}\neq 0;\quad \left.\frac{dx(\varphi)}{d\varphi}\right|_{\varphi:=0}=x'(0)=\omega_0\cdot x_0\cdot(1-x_0)$$

care nu se integrează analitic, ci numeric ! Este echivalentă cu sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinul întâi: $dx/d\varphi=y$; $x\cdot dy/d\varphi=y^2-x^2+\lambda\cdot x^3$; $x(0)=x_0$; $y(0)=y_0=x'(0)$. Cu vectorul de stare dinamică $[\,x \quad y\,]\neq[\,0 \quad 0\,]$ avem sistemul dinamic bidimensional, neliniar şi autonom:

$$\frac{d}{d\varphi}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F(y)\\G(x,y,\varphi,\lambda)\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}y\\-x+y^2/x+\lambda\cdot x^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1\\-1&0\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}+\left(\frac{y^2}{x}+\lambda\cdot x^2\right)\cdot\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$$

în care atât neliniaritatea cât şi ereditatea apar doar în linia de jos a operatorului matriceal unde intervin simultan atât populaţia normată x cât şi viteza sa de variaţie y precum şi parametrul de control ereditar normat λ.



$\omega_0=1$ $\quad\delta_0=0.01$ $\quad p_*=100$ $\quad\lambda=0.1$

$\varphi_{in}=0$ $\quad x_{in}=0.1$ $\quad y_{in}=0.09$ $\quad k=0.001$

Starea staţionară este $[\,x_* \quad y_*\,]\neq[\,0 \quad 0\,]$, soluţie a ecuaţiei:

$$\begin{bmatrix}y_*\\-x_*+y_*^2/x_*+\lambda\cdot x_*^2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\quad\text{deci:}\quad\begin{bmatrix}x_*\\y_*\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\lambda\\0\end{bmatrix}\neq\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

şi exprimă valoarea $x_*=1/\lambda$ către care se stabilizează (cu viteză de variaţie nulă $y_*=0$) populaţia (normată) x, ca fiind inversul parametrului de control ereditar normat λ. Cu valorile iniţiale

$[\,x_{in}\quad y_{in}\,]\,]$ şi populaţia staţionară $p_* = \omega_0 / \delta_0$ sistemul dinamic se poate soluţiona numeric în mediul software MathCAD, rezultând atât diagrame temporale normate $x(\varphi)$ respectiv $y(\varphi)$ cât şi diagrama în spaţiul stărilor $[\,x\quad y\,]$; în exemplul cu datele din figură, populaţia normată x creşte de la valoarea iniţială x_{in} atinge un maxim x_M şi apoi tinde spre anulare (extincţie) ceea ce denotă că deşi avem ereditate, conflictele interne cu ponderea δ_0 domină situaţia; modelul permite testarea diverselor alte situaţii.

5. Modele cu două specii

Cele mai interesante dinamici din lumea biologică decurg din luarea în consideraţie a *interacţiunilor* dintre specii.

5.1 Modelul Lotka-Volterra

Un prim model care descrie dinamica sistemelor biologice în care interacţionează doar două specii (într-un ecosistem), *prădătorul* şi *prada,* a fost propus[21] în 1925 de către Alfred Lotka şi, în 1926, de Vito Volterra. El stă la baza multor modele privind dinamica populaţiilor în ecologie. Spre deosebire de modelele „Malthus” şi „Logistic”, modelul Lotka-Volterra se bazează pe un sistem de ecuaţii diferenţiale ordinare.

5.2 Modelul Pradă - Prădator (integro – diferenţial)

Pentru cazul a două specii în competiţie vom considera deci modelul pradă - prădator (devoraţi / devoranţi, peşti / rechini) care descrie evoluţia populaţiilor p_1 şi p_2 ale celor două specii având: pulsaţiile proprii ω_{01} şi respectiv ω_{02}, conflictele fiecărei specii, vizavi de cealaltă, proporţionale cu produsele $p_1 \cdot p_2$ & $p_2 \cdot p_1$ (egale cu cardinalul produsului cartezian) dar cu ponderile specifice δ_{012} şi respectiv δ_{021} precum şi ereditatea fiecărei specii ce se manifestă încrucişat la cealată specie cu nucleele specifice de integrare a eredităţii k_{12} şi respectiv k_{21}. Sistemul dinamic asociat (bidimensional, autonom şi neliniar) este integro-diferenţial:

$$\frac{d}{dt}p_1(t) = \omega_{01} \cdot p_1(t) - \delta_{012} \cdot p_1(t) \cdot p_2(t) + p_1(t) \cdot \int_{t_0}^{t} k_{12}(t,t') \cdot p_2(t') \cdot dt'$$

$$\frac{d}{dt}p_2(t) = \omega_{02} \cdot p_1(t) - \delta_{021} \cdot p_2(t) \cdot p_1(t) + p_2(t) \cdot \int_{t_0}^{t} k_{21}(t,t') \cdot p_1(t') \cdot dt'$$

Balanţa competiţiei între cele două specii este caracterizată astfel:

- La populaţii mici ($p_1 \to 0 \leftarrow p_2$) (când se pot neglija termenii ce conţin produse – conflictele şi ereditatea) avem tendinţe contrare de evoluţie exprimate prin valoarea negativă a produsului pulsaţiilor proprii: $\omega_{01} \cdot \omega_{02} < 0$ (o specie creşte pe seama scăderii celeilalte).
- Conflictele, proporţionale cu produsul $p_1 \cdot p_2$ (cardinalul produsului cartezian), descurajează o specie în creştere încurajând creşterea celeleilalte specii deci: $\omega_{01} \cdot \delta_{021} < 0$ & $\omega_{02} \cdot \delta_{012} < 0$; în cazul nucleelor *“time-invariant”*: $k_1(t,t') = k_{1inv}(t'-t)$ şi $k_2(t,t') = k_{2inv}(t'-t)$ se impun în mod firesc notaţiile:

[21] WEB, Lotka–Volterra equations, https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations

$$p_{*1}=\frac{\omega_{01}}{\delta_{012}},\ p_{*2}=\frac{\omega_{02}}{\delta_{021}},\ x(t)=\frac{p_1(t)}{p_{*1}},\ y(t)=\frac{p_2(t)}{p_{*2}},$$

$$k_{12}(t,t')\cdot p_{*2}=:\Gamma_{12}(t,t'),\ \ \delta_{012}\cdot p_{*2}=\frac{\delta_{012}}{\delta_{021}}\cdot\omega_{02}=:\omega_{012}$$

$$k_{21}(t,t')\cdot p_{*1}=:\Gamma_{21}(t,t'),\ \ \delta_{021}\cdot p_{*1}=\frac{\delta_{021}}{\delta_{012}}\cdot\omega_{01}=:\omega_{021}$$

Unde se evidenţiază populaţiile staţionare $p_{*1}\,\&\,p_{*2}$, populaţiile normate $x(t)\,\&\,y(t)$, impactul încrucişat al eredității prin nucleele de integrare k_{12} & k_{21} (rescalate la Γ_{12} & Γ_{21}), pulsaţiile de interacţiune $\omega_{012}\,\&\,\omega_{021}$. Cu vectorul de stare $[\,x \quad y\,]$ sistemul dinamic integro-diferenţial în varianta complet normată este definit de:

$$\begin{cases}\dfrac{d}{dt}x=\omega_{01}\cdot x-\omega_{012}\cdot x\cdot y+x\cdot\displaystyle\int_{t_0}^{t}\Gamma_{12}(t,t')\cdot y(t')\cdot dt'\\[2ex] \dfrac{d}{dt}y=\omega_{02}\cdot y-\omega_{021}\cdot y\cdot x+y\cdot\displaystyle\int_{t_0}^{t}\Gamma_{21}(t,t')\cdot x(t')\cdot dt'\end{cases}$$

iar balanţa competiţiei (cu ceeaşi semnificaţie prezentată mai sus) se exprimă prin condiţiile:

$$\omega_{01}\cdot\omega_{02}<0,\ \ \omega_{01}\cdot\omega_{021}<0,\ \ \omega_{02}\cdot\omega_{012}<0$$

5.3 Modelul Pradă - Prădator (*diferenţial*)

În cazul "fără ereditate" ($\Gamma_{12}=\Gamma_{21}=0$), sistemul dinamic (bidimensional, autonom şi neliniar) este doar diferenţial:

$$\begin{cases}dx/dt=\omega_{01}\cdot x-\omega_{012}\cdot x\cdot y\\ dy/dt=\omega_{02}\cdot y-\omega_{021}\cdot y\cdot x\end{cases}\quad \text{sau}\quad \frac{d}{dt}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\omega_{01} & 0\\ 0 & \omega_{02}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}-x\cdot y\cdot\begin{bmatrix}\omega_{012}\\ \omega_{021}\end{bmatrix}$$

şi exprimă pentru fiecare specie (dată fiind lipsa eredității) doar tendinţele proprii de creştere liniară (prin pulsaţiile proprii ω_{01} & ω_{02}), contracarate neliniar de conflictele dintre specii (prin pulsaţiile de interacţiune ω_{012} & ω_{021}).

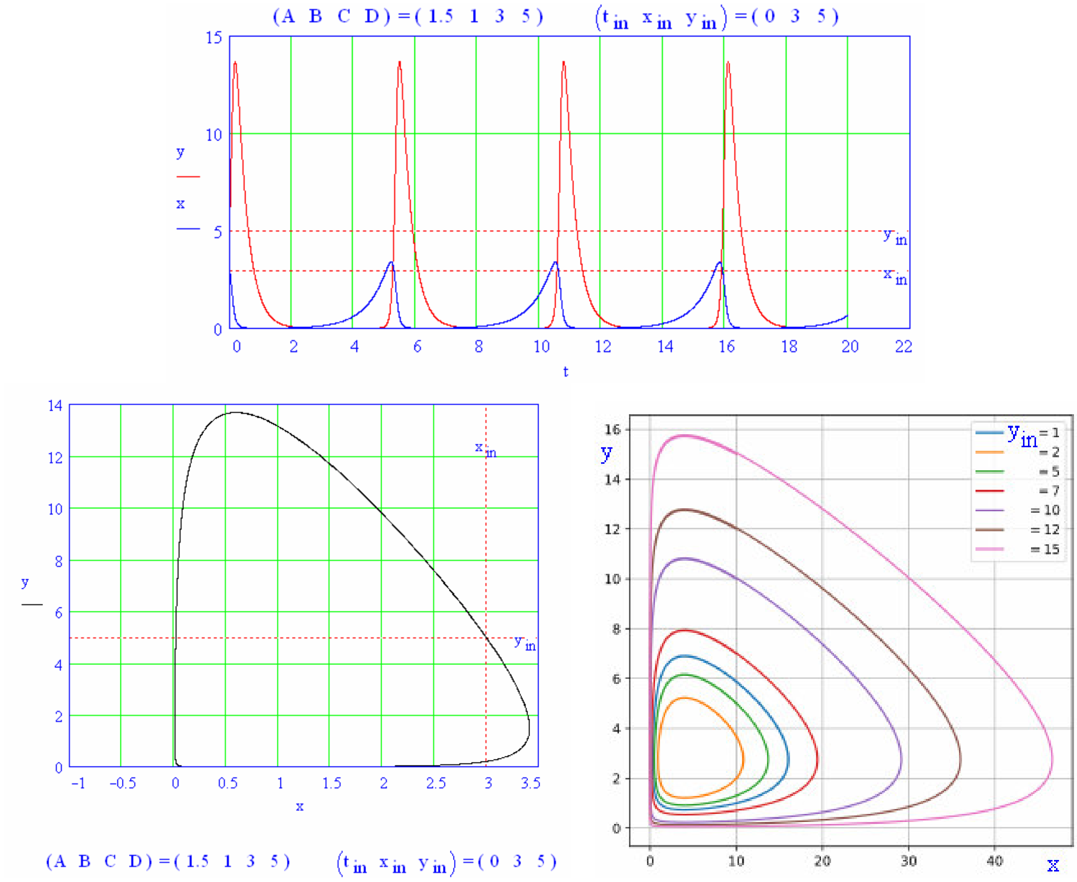
Sistemul liniarizat (în care se neglijează termenii produs $x\cdot y$) are valorile proprii ω_{01} şi ω_{02} reale şi de semne contrare, iar sistemul neliniar nu este integrabil analitic ci doar numeric şi are în spaţiul stărilor $[\,x \quad y\,]$ orbite închise (cele două populaţii evoluează ciclic). Astfel eliminând parametrul timp şi făcând schimbări de variabile, calculăm:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\omega_{02}\cdot y-\omega_{021}\cdot y\cdot x}{\omega_{01}\cdot x-\omega_{012}\cdot x\cdot y},\quad \frac{d[\ln(y)]}{d[\ln(x)]}=\frac{\omega_{02}-\omega_{021}\cdot x}{\omega_{01}-\omega_{012}\cdot y},\ \begin{matrix}u=\ln(x)\\ v=\ln(y)\end{matrix},$$

$$\frac{dv}{du}=\frac{\omega_{02}-\omega_{021}\cdot e^{u}}{\omega_{01}-\omega_{012}\cdot e^{v}},\quad \begin{matrix}(\omega_{01}-\omega_{012}\cdot e^{v})\cdot dv=(\omega_{02}-\omega_{021}\cdot e^{u})\cdot du\\ d(\omega_{01}\cdot v-\omega_{012}\cdot e^{v})-d(\omega_{02}\cdot u-\omega_{021}\cdot e^{u})=0\end{matrix}$$

$$\begin{matrix}(\omega_{01}\cdot v-\omega_{012}\cdot e^{v})-(\omega_{02}\cdot u-\omega_{021}\cdot e^{u})=\ln(C);\ C>0\\ \ln(y^{\omega_{01}})-\ln(x^{\omega_{02}})+\omega_{021}\cdot x-\omega_{012}\cdot y=\ln(C)\end{matrix},\quad \frac{y^{\omega_{01}}}{x^{\omega_{02}}}\cdot\frac{\exp(-\omega_{012}\cdot y)}{\exp(-\omega_{021}\cdot x)}=K$$

ceea ce reprezintă o curbă închisă (ciclu !). În notaţii uzuale $\omega_{01} = A$, $\omega_{012} = B$, $\omega_{02} = -C$, $\omega_{021} = -D$, $A, B, C, D > 0$ sistemul este $dx/dt = A \cdot x - B \cdot x \cdot y$; $dy/dt = -C \cdot y + D \cdot y \cdot x$ cu soluţia $x^{C} \cdot y^{A} \cdot \exp(-D \cdot x - B \cdot y) = K$. Interpretarea poate fi: A = coeficient de reproducere liberă a peştilor care nu au nevoie de rechini, B = coeficient de mortalitate a peştilor prădaţi de rechini, C = coeficient de mortalitate liberă a rechinilor care au nevoie de peşti, D = coeficient de reproducere a rechinilor prădători de peşti.



După cum se observă şi din figură, *extincţia totală a unei specii nu are loc*, cele două populaţii ciclează (temporal periodic) iar în spaţiul stărilor $[\,x \quad y\,]$ avem în funcţie şi de condiţiile iniţiale curbe închise (evoluţiii ciclice).

6. Modele cu trei specii

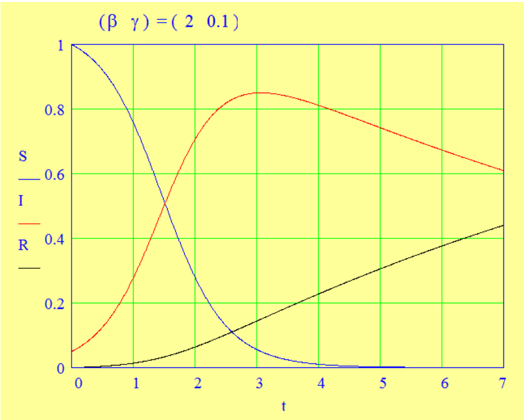
6.1 Modelul Kermack - McKendrick

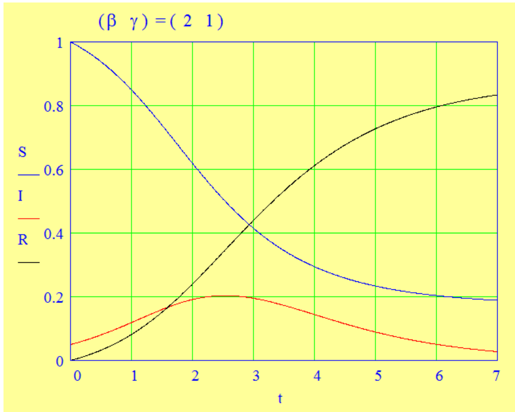
Teoria Kermack-McKendrick[22] face o ipoteză care prezice distribuția în timp a cazurilor unei boli infecțioase transmisă într-o populație partiţionată în: S susceptibilă, I infectată, R recuperată. Trăsătura importantă este că a fost un model în care nivelul infecției a afectat ratele de transmisie şi recuperare. Sistemul dinamic este 3D, autonom şi neliniar:

[22] W. O. Kermack and A. G. McKendrick, "A contribution to the mathematical theory of epidemics", *Proceedings of the Royal Society of London. A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 115 (772), 1927, pp. 700-721.

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} S \\ I \\ R \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta \cdot S \cdot I \\ \beta \cdot S \cdot I - \gamma \cdot I \\ \gamma \cdot I \end{bmatrix} = -\gamma \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot I - \beta \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot S \cdot I$$

unde β este un coeficient de infectare iar γ este un coeficient de recuperare; pentru un coeficient de infectare $\beta > 1$, coeficientul de recuperare γ se manifestă ca în cele două figuri:





ilustrând în primul caz, o evoluție în care infecția crește puternic până la o valoare maximă după care scade totuşi datorită recuperării care creşte modest – de aceea populația susceptibilă merge la extincţie, iar în al doilea caz în care recuperarea este mai puternică, infecţia atinge un nivel maxim mai mic – de aceea populaţia susceptibilă nu merge la extincţie.

7. Concluzii, observaţii şi probleme de analizat

• Au fost prezentate unele modele abstracte de sisteme dinamice 1D, 2D, 3D privind evoluţia unor populaţii, cu o terminologie adecvată unei standardizări şi analizate unele interpretări calitative sau extinderi de model. Nu s-a luat în consideraţie descrierea interacţiunii cu mediul sau alte modele mai complicate. Simulările numerice au fost efectuate în mediul "software" MathCAD.

• În modelarea matematică cu sistem dinamic, normarea (adimensionalizarea) joacă un rol important în soluţionare şi interpretare, dar şi în soluţionarea numerică. Există un mod natural de a efectua această operaţiune (de exemplu, timpul trebuie înlocuit cu o variabilă unghiulară). Trebuie investigată posibila semnificaţie a unei condiţii iniţiale (normată) supra-unitară sau negativă pentru populaţie.

• Sistemele dinamice prezentate au caracter algebric în partea lor operatorială. Legităţile biofizice pot impune modelării, în mod natural, un caracter nealgebric (transcendent), dar simularea numerică se bazează tot pe calcule algebrice.

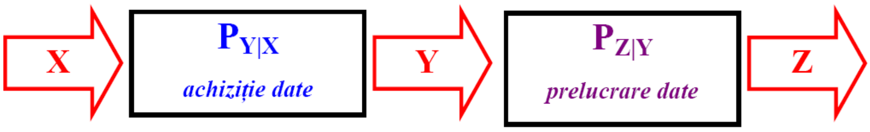
• Modelul Malthus nu este realist deoarece nu se saturează. Modelul lui Malthus este conceput pe sistem dinamic unidimensional şi poate fi corectat cu ajutorul unor coeficienţi vitali (ce semnifică tendinţa proprie de creştere dar şi tendinţa de autofrânare datorită conflictelor interne); se poate integra analitic, ceea ce permite modelarea evoluţiei unei populaţii ca sistem dinamic neautonom – controlat extern de coeficienţi vitali variabili în timp. Faptul că exponentul α în *modelul lui Malthus corectat* poate fi fracţionar trebuie conciliat cu existenţa unei unităţi fizice de măsură pentru populaţia p (milioane de locuitori).

• Ipoteza (de natură statistică) care particularizează *modelul lui Malthus - corectat* la *modelul Verhulst - Curba logistică* este aceea că numărul de conflicte (*între câte doi membri*!) este proporţional cu pătratul populaţiei.

- În *modelul Verhulst - Curba logistică* timpul este continuu. În timp discretizat, poate apărea o mare varietate de comportament specifică scenariilor de tip haos determinist, ceea ce subliniază faptul că a avea *soluţii stabile sau haotice nu implică în mod necesar că fenomenul descris de sistemul dinamic se comportă în mod similar.*
- Modelul Volterra ia în consideraţie ereditatea prin intermediul unui nucleu de integrare. Nucleul de integrare poate fi "time-invariant", considerând deci că ereditatea se manifestă la fel indiferent de originea pe axa timpului, fiind caracteristică speciei în orice epocă.
- Deşi modelul Volterra este pentru o singură specie, necesită două condiţii iniţiale deoarece are la bază o ecuaţie integro-diferenţială convertită în ecuaţie diferentială de ordinul doi, iar sistemul dinamic asociat (neliniar şi autonom) este bidimensional. În cazul unui nucleu de integrare a eredităţii constant, se consideră că nivelele populaţiei de la momentele anterioare au aceeaşi influenţă ereditară.
- Modelul Lotka-Volterra este o extindere a modelului Volterra la cazul a două specii. Sistemul dinamic este bidimensional, neliniar şi neautonom. Balanţa competiţiei se exprimă prin semnele coeficienţilor vitali, în sensul că în aproximaţia liniară (populaţii mici) se manifestă tendinţe contrare de evoluţie exprimate prin valoarea negativă $\omega_{01} \cdot \omega_{02} < 0$ a produsului pulsaţiilor proprii (o specie creşte pe seama scăderii celeilalte), iar prin luarea în considerare şi a termenilor neliniari (conflictele între cele două specii, proporţionale cu cardinalul produsului cartezian) se descurajează o specie în creştere încurajând creşterea celeleilalte specii: $\omega_{01} \cdot \delta_{021} < 0$ & $\omega_{02} \cdot \delta_{012} < 0$.
- Sistemul dinamic Lotka-Volterra în cazul fară ereditate este bidimensional, neliniar şi chiar în cazul mai simplu autonom nu se poate integra analitic cu soluţii temporale explicite, ci doar analitic cu soluţie ca funcţie implicită; practic este soluţionat doar numeric cu portret în spaţiul stărilor. Extincţia totală a unei specii nu are loc, cele două populaţii ciclează (temporal periodic) iar în spaţiul stărilor, în funcţie şi de condiţiile iniţiale, traiectoriile sunt curbe închise, ceea ce exprimă evoluţia ciclică.
- Modelul epidemiologic Kermack - McKendrick este un sistem dinamic tridimensional, neliniar şi, în prima sa formulare, autonom (cu coeficienţi constanţi). Portretele în spaţiul stărilor sunt mai dificil de reprezentat, dar prin soluţionare numerică se pot studia influenţele coeficienţilor epidemiologici.
- În ceea ce priveşte ideea că modelarea matematică (fie chiar şi cu sisteme dinamice) poate duce la "dezvoltarea biologiei ca ştiinţă" poate fi parţial acceptată numai dacă: a) includem modelarea bio-matematică în ştiinţa numită *biologie-format extins*, deci adoptând un punct de vedere interdisciplinar - integrativ şi renunţând la concepţia cum că "matematica este ceea ce fac matematicienii" iar "biologia este ceea ce fac biologii". b) recunoaştem incidenţa a ceea ce se numeşte "Lema Prelucrării Datelor" din teoria informaţiei[23].

Astfel putem privi drept surse de informaţie: X = realitatea fizică (biologică), Y = cercetătorul specialist în biologie, Z = cercetătorul specialist în bio-matematică şi conectarea (*condiţionarea* !) lor într-un lanţ (Markov) cu două canale de comunicaţie $P_{Y|X}$ (*instumentaţia tehnică de măsurare biologică*) şi $P_{Z|Y}$ (*instumentaţia tehnică de prelucrare"hardware" & "software" specifică Tehnologiei Informaţiei*) ca în figură.

[23] A. T. Murgan, *Principiile teoriei informaţiei în ingineria informaţiei şi a comunicaţiilor*, Bucureşti, Editura Academiei Române, 1998.



Mărimea care caracterizează procesul de cunoaştere ştiinţifică este “*transinformaţia*” $I(X;Z) \equiv I(Z;X)$ (corect *informaţia mutuală* !) pe canalul echivalent $P_{Z|X}$. Potrivit lemei invocate (valabilă în aproximaţia “*lanţ Markov de ordinul întâi*” - validată şi de practică) avem: $I(X;Z) \le \min\{I(X;Y), I(Y;Z)\}$ şi concluzia că nu trebuie să exagerăm cu importanţa, organizarea şi finanţarea canalului de comunicaţie de prelucrare a datelor dacă, aşa cum se întâmplă în multe situaţii, canalul de achiziţie a datelor este slab dotat. Desigur, nici invers.

- Limitările de model evidenţiate care afectează predicţia (şi au impus anumite extinderi de model) confirmă faptul că *niciodată realitatea nu este izomorfă cu un anume model*.

8. Bibliografie

1. Bacaër, Nicolas. *A Short History of Mathematical Population Dynamics*, London, Springer-Verlag, 2011.
2. Ana Bazac, „Spiru Haret, Mecanica socială: semnificaţii epistemologice”, *DIS/Studii și comunicări*, 2012, http://studii.crifst.ro/doc/2012/2012_4_02.pdf.
3. Conta, Vasile. *Teoria fatalismului - Teoria ondulaţiei universale*, Iași, Editura Junimea, 1995.
4. Haret, Spiru. *Mecanica socială*, Bucureşti, Editura Ştiinţifică, 1969.
5. Holmes, Philip. *A Short History of Dynamical Systems Theory. 1885-2007*, Encyclopedia Of Life Support Systems (EOLSS).
6. Kermack, W. O. and A. G. McKendrick. “A contribution to the mathematical theory of epidemics”, *Proceedings of the Royal Society of London, A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, volume 115 (772), 1927, pp. 700-721.
7. Thomas Malthus, *An Essay on the Principle of Population*, London, Printed for J. Johnson, în St. Paul’s Church-Yard, 1798.
8. Murgan, Adrian-Traian. *Principiile teoriei informaţiei în ingineria informaţiei şi a comunicaţiilor*, Bucureşti, Editura Academiei Române, 1998.
9. Nenciu, Georgeta. *Biomecanică*, Curs în tehnologia IFR, Bucureşti, Editura Fundaţiei România de Mâine, 2012.
10. Newton, Isaac. *Principiile matematice ale filozofiei naturale*, Bucureşti, Editura Academiei RPR, 1956.
11. Otlăcan, Eufrosina. „Matematica şi ştiinţele vieţii – naturale şi sociale”, *Noema*, XIV, 2015, http://noema.crifst.ro/ARHIVA/2015_4_01.pdf.
12. Pearl, Raymond & Lowell J. Reed, *On the Mathematical Theory of Population Growth*, Ferrara, Taddei, 1923.
13. Vladimir Trebici, *Mică enciclopedie de demografie*, Bucureşti, Editura Ştiinţifică şi Enciclopedică, Bucureşti, 1975.
14. Voinea, Radu P., Ion V. Stroe, *Introducere în teoria sistemelor dinamice*, Bucureşti, Editura Academiei Române, 2000.
15. WEB, Logistic function, https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_function
16. WEB, Logistic distribution, https://en.wikipedia.org/wiki/Logistic_distribution
17. WEB, Lotka-Volterra equations,

https://en.wikipedia.org/wiki/Lotka%E2%80%93Volterra_equations
WEB, Population dynamics, https://en.wikipedia.org/wiki/Population_dynamics
18. WEB, Total Population of the World by Decade, 1950-2050 (historical and projected), https://www.infoplease.com/world/population-statistics/total-population-world-decade-1950-2050